

Zinszahlung von Krediten

Anmerkungen zur Finanzmathematik

• Übersicht über die verwendete Notation

K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung ($k > 0$), laufende Auszahlung ($k < 0$)
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

Tilgungsrechnung

Modell:

① Ein Schuld (ein aufgenommenem Kredit) wird getilgt und verzinst.

② Alle Zahlungen (Tilgung und Zinszahlung) erfolgen am Periodenende (mehrfachige Zahlungsweise)

③ Zinsen werden jeweils nur auf die noch bestehende Restschuld gezahlt.

Arten der Tilgung:

① Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit (endfälliges Darlehen).

② Rückzahlung in Teilbeträgen

a) durch konstante Tilgungsbeträge

(Ratenstilgung)

Annuitäten-

darlehen

b) durch Annuitäten

Annuität ist die konstante
Summe aus Zins- und
Tilgungszahlung

3. Weitere Fälle

Darstellungsinstrument:

Vollständiger Tilgungsplan,

eine Tabelle, aus der für jede Periode die mitgeführte Restschuld sowie die Zins-, die Tilgungs- und die Gesamtzahlung hervorgehen.

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung
1				
2				

€ 2000 sind in 4 Jahre bei 7% p.a.
zu tilgen

Datenlage:

K_0 : zu tilgende Schuld,
Kreditbetrag

n : Laufzeit

p : Zinsfuß, Zinssatz

f : ungenügend Aufzinsungsfaktor

K_{n^*} : Restschuld nach n^*

Perioden / nach n^*

Perioden nach zu tilgende
Schuld.

Aufgaben

wird erweitert

12. € 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.
- Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
 - Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
 - Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.
13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,- (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

Projektaufgaben

Aufgabe 4) Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6000,-, dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

- für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
- für den Fall konstanter Annuitäten.

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5

Tilgung zu konstanten Annuitäten

Kreditbetrag: € 10.000.000,-

Laufzeit: 40 Jahre

Zinsfuß: 11% p. a.

- Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32} !
- Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20} !
- Restschuld nach 35 Jahren K_{35} ! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

Aufgabe 12

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

Erweiterung: Löse als endfälliges Darlehen

Beim endfällige erfolgt die komplette Tilgung in der letzten Periode - lassen sich aber in jeder Periode zu berichten.

$$K_0 = 20.000$$

$$P = 7$$

$$n = 4$$

$$f = 1,07$$

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung
1	20.000	1.400 ⁽¹⁾	—	1.400 ⁽²⁾
2	20.000 ⁽³⁾	1.400	—	1.400
3	20.000	1.400	—	1.400
4	20.000	1.400	20.000	21.400

1. $Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$ hier: $Z_1 = 20000 \cdot \frac{7}{100} = 1.400$

allg.: $Z_{n^*} = K_{n^*-1} \cdot \frac{p}{100}$

2. $G_1 = Z_1 + T_1$ hier: $G_1 = 1.400 + 0 = 1.400$

allg.: $G_{n^*} = Z_{n^*} + T_{n^*}$

3. neue RS = alte RS - aktuelle Tilgung

hier: neue RS = $20000 - 0 = 20000$

nur T-Beträge reduzieren die Restschuld

Aufgabe 12

€ 20.000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

1. Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen

Gegeben $K_0 = 20000$ $n = 4$

$p = 7$ $f = 1,07$

1.) Berechnung des konstanten Tilgungsbetrages T

$$T = \frac{K_0}{n}$$

hier $T = \frac{20.000}{4} = 5.000$

2

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung
1	20.000	1400	5.000	6400
2	15.000	1050	5.000	6050
3	10.000	700	5.000	5700
4	5000	350	5000	5350

neue $R_n = \text{alte } R_n - \text{aktuelle Tilgung}$

Aufgabe 12

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

2. Löse bei (konstanten) Annuitäten

$$K_0 = 20000 \quad p = 7 \quad f = 1,07 \quad n = 4$$

① Berechnung der Annuität (A)

$$A = \frac{K_0 \cdot f^n}{f^n - 1} \cdot \frac{f - 1}{f - 1} \quad A = \frac{20000 \cdot 1,07^4}{1,07^4 - 1} \cdot \frac{1,07 - 1}{1,07 - 1}$$

$$= 5.904,56$$

$$\frac{A}{f - 1} = \frac{20000 \cdot 1,07^4}{f^n - 1} \cdot \frac{f - 1}{f - 1}$$

$$(20000 \cdot 1,07^4) : ((1,07^4 - 1) : (1,07 - 1)) =$$

②

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung Annuität
1	20.000	1.400 ^①	4.504,56 ^②	5.904,56
2	15.495,44 ^③	7 ⁷ $\frac{1,087,68}{1,02}$	4.819,88	5.904,56
3	10.675,56	747,29	5.157,27	5.904,56
4	5.518,29	386,28	5.518,28	5.904,56

② $T_1 = A - Z_1$

hier: $T_1 = 5.904,56 - 1.400$
4.504,56

Ergebnis: Bei der Tilgung in Annuitäten bilden die

Tilgungsbeträge eine geometrische Folge, und es gilt

↳ fortwährendes Multiplizieren mit einem konstanten Faktor

$$T_{n^*} = T_1 \cdot q^{n^* - 1}$$

Aufgabe 12

neue Abwandlung

€ 20.000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in sechs Jahren zu tilgen, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei bleiben sollen.

Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen...

Tilgungsfrei Jahre sollen die Liquidität des Kreditnehmers schonen. In tilgungsfreien Jahren fallen nur die Zinsen als Zehnpfennigbelastung an.

Gegeben: $K_0 = 20.000$, $p = 7$, $q = 1,07$
 $n = 6$ Gesamtdauer
davon $n_1 = 2$ tilgungsfrei
davon $n_2 = 4$ mit T

1.) $T = \frac{K_0}{m_2}$ $T = \frac{20000}{4} = \underline{\underline{5000}}$

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung
1	20.000	1400	-	1400
2	20000	1.400	-	1400
3	20000	1400	5.000	6.400
4	15000	1050	5.000	6.050
5	10000	700	5.000	5700
6	5000	350	5.000	5.350

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5
 Tilgung zu konstanten Annuitäten
 Kreditbetrag: € 10.000.000,-
 Laufzeit: 40 Jahre
 Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32} !
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20} !
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35} ! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

1) Gegeben: $K_0 = 10.000.000$ $n = 40$
 $p = 11$ $q = 1,11$

a) Annuität berechnen

$$A = \frac{K_0 \cdot q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$A = \frac{10000000 \cdot 1,11^{40}}{\frac{1,11^{40} - 1}{1,11 - 1}} = \underline{\underline{1.117.187,27}}$$

b) z_1 berechnen

$$z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$z_1 = 10.000.000 \cdot \frac{11}{100} = \underline{\underline{1.100.000}}$$

$$T_{32} = T_1 \cdot q^{32-1}$$

$$T_{32} = 17.187,27 \cdot 1,11^{31}$$

$$= \underline{\underline{436.736,25}}$$

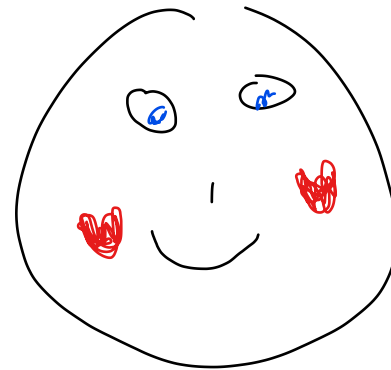
Satz

c) T_1 berechnen

$$T_1 = A - z_1$$

$$T_1 = 1.117.187,27 - 1.100.000$$

$$= \underline{\underline{17.187,27}}$$



$$\frac{10.01.2022}{2.01.2022}$$

$$2.) z_{20} = ?$$

d) T_{32} berechnen

$$T_{n+1} = T_n \cdot q^{n+1-1}$$

$$Z_{20} = A - T_{20}$$

$$Z_{20} = A - T_1 \cdot 19$$

$$Z_{20} = 1.117.187,27 - 17.187,27 \cdot 1,11^{19}$$

$$= \underline{\underline{992.350,22}}$$

Satz...

3.) ab Seite 37

Rentenrechnung spezial

Projektaufgaben

Aufgabe 5) Ewige Rente

- a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,- zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von $p = 8\%$ p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?
- b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine
- a) am Anfang
 - b) am Ende

eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,- sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Aufgabe 6) Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung

- a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,-. Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
- b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,-. Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

unterjährige Zahlungen bei jährlicher Verzinsung

Datenlage:

Formelinstrumentarium:

Projektaufgaben

Aufgabe 6) Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung

- a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,-. Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
- b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,- . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

ewige Rente:

Datenlage:

Formelinstrumentarium:

Aufgabe 5) Ewige Rente

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,- zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von $p = 8\%$ p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

a) am Anfang

b) am Ende

eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,- sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Platz für Notizen

22.5 Zusatz

3) Ges. K_{35}

Lösung 1: Logische Lösung

$K_{35} =$ Kreditbetrag - Summe aller T-Beträge Jahre 1 bis 35

→ T-Beträge bilden geometrische Folge

↳ Summe der ersten n T-Beträge wie geometrische Reihe

$$K_n = K_0 - T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = 10.000.000 \quad T_1 = 17.187,27$$

$$p = 11 \quad q = 1,11 \quad n = 35$$

$$K_{35} = 10.000.000 - 17.187,27 \frac{1,11^{35} - 1}{1,11 - 1}$$

$$= \underline{\underline{4.129.008,09}} \quad \text{Solz...}$$

Lösung 2: über die allg. nachschüssige Formel

$$K_n = K_0 q^n + T_2 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

GS: $K_0 = 10.000.000$ nachschüssig

$$n = 35 \quad p = 11 \quad q = 1,11$$

$$T_2 = -1.117.187,27$$

$$K_{35} = 10.000.000 \cdot 1,11^{35} - \frac{1,11^{35} - 1}{1,11 - 1} \cdot 1.117.187,27$$

$$= \underline{\underline{4.129.008,09}} \quad \text{Sol}$$

Lösung 3 über Z_{36} , denn
 K_{35} wird als RS im 36. Jahr
 mit gef. Z_{36}

$$Z_{36} = K_{35} \cdot \frac{P}{100} \quad | \cdot \frac{100}{P}$$

$$K_{35} = \frac{Z_{36} \cdot 100}{P}$$

$$K_{35} = \frac{(A - T_{36}) \cdot 100}{P}$$

$$K_{35} = \frac{(A - T_1 \cdot 1,11^{35}) \cdot 100}{P}$$

$$K_{35} = \frac{(1.117.187,27 - 17.187,27 \cdot 1,11^{35}) \cdot 100}{11}$$

$$= \underline{\underline{4.129.008,09}} \quad \text{Sol}$$

