Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- **<u>Übersicht über die verwendete Notation</u>**

K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung $(k > 0)$, laufende Auszahlung $(k < 0)$
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

Rückzahlung von Krediten

Tilgungsrechnung

Modell:

1. Eine Schuld (ein aufgenommener Kredit) wird getilgt und verzinst.

2. Alle Zahlungen (Tilgungs- und Zinszahlung) erfolgen am Periodenende (nachschüssige Zahlungsweise)

3. Zinsen werden jeweils nur auf die noch bestehende Restschuld gezahlt.

Arten der Tilgung:

1. Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit (endfälliges Darlehen).

2. Rückzahlung in Teilbeträgen

   a) durch konstante Tilgungsbeträge (Ratentilgung)

Annuitätendarlehen

   b) durch Annuitäten

Annuität ist die konstante Summe aus Zins- und Tilgungszahlung

3. Weitere Fälle

Darstellungsinstrument:

Vollständiger Tilgungsplan,
eine Tabelle, aus der für jede Periode die mitgeführte Restschuld sowie die Zins-, die Tilgungs- und die Gesamtzahlung hervorgehen.

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1				
2				

€ 20000 sind in 4 Jahren bei 7% p.a. zu tilgen

Datenlage:

K_0: zu tilgende Schuld, Kreditbetrag

n: Laufzeit

p: Zinsfuß, Zinssatz

q: zugehöriger Aufzinsungsfaktor

K_{n^*}: Restschuld nach n^* Perioden / nach n^* Perioden noch zu tilgende Schuld.

Aufgaben

wird erweitert

12. € 20 000,— sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.
    a) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
    b) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
    c) Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.

13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,— (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a.. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

Projektaufgaben

Aufgabe 4) **Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)**

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6 000,— , dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

a) für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
b) für den Fall konstanter Annuitäten.

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5
Tilgung zu konstanten Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

Erweiterung: Löse als endfälliges Darlehen

Beim endfälligen erfolgt die komplette Tilgung in der letzten Periode – Zinsen sind aber in jeder Periode zu entrichten.

$K_0 = 20.000$ $\quad p = 7$

$n = 4$ $\quad q = 1{,}07$

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1	20.000	1 1.400	–	2 1400
2	3 20.000	1.400	–	1.400
3	20000	1.400	–	1.400
4	$\boxed{20.000}$	1400	$\boxed{20.000}$	21.400

=

1. $z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$ hier: $z_1 = 20000 \cdot \frac{7}{100}$

$= \underline{\underline{1.400}}$

allg: $\boxed{z_{n^*} = K_{n^*-1} \cdot \frac{p}{100}}$

② $G_1 = Z_1 + T_1$ hier:

$G_1 = 1400 + 0 = \underline{\underline{1400}}$

allg.: $\boxed{G_{n^*} = Z_{n^*} + T_{n^*}}$

③ neue RS =

alte RS – aktuelle Tilgung

hier: neue RS:

$20000 - 0 = 20000$

nur T-Beträge reduzieren die Restschuld

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

1. Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen

geg: $K_0 = 20000$ $n = 4$

$p = 7$ $q = 1{,}07$

1. Berechnung des konstanten Tilgungsbetrages T

$$\boxed{T = \frac{K_0}{n}}$$

hier $\boxed{T = \frac{20.000}{4} = 5.000}$

i

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1	20.000 · $\frac{7}{100}$	1 1400 +	5.000 =	2 6400
2	3 15.000	1.050	5.000	6.050
3	10.000	700	5.000	5700
4	$\boxed{5000}$	350	$\boxed{5000}$	5350

=

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

2. Löse bei (konstanten) Annuitäten

$K_0 = 20000 \quad p = 7 \quad q = 1{,}07 \quad n = 4$

1. Berechnung der Annuität (A)

$$A = \frac{K_0 \cdot q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$A = \frac{20000 \cdot 1{,}07^4}{\frac{1{,}07^4 - 1}{1{,}07 - 1}} = \underline{\underline{5.904{,}56}}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{20000 \cdot 1{,}07^4}{\square - \frac{\square\ 1{,}07^4 - 1}{\square\ 1{,}07 - 1}}$$

$$(20000 \cdot 1{,}07^4) : ((1{,}07^4 - 1) : (1{,}07 - 1)) =$$

2.

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung Annuität
1	20.000	1.400 (1)	4.504,56 (2)	5.904,56
2	15.495,44 (3)	$\cdot \frac{7}{100}$ 1.084,68	4.819,88	5.904,56
3	10.675,56	747,29	5.157,27	5.904,56
4	$\boxed{5.518,29}$	386,28	$\boxed{5518,28}$	5.904,56

=

(2) $T_1 = A - Z_1$

hier: $T_1 = 5.904,56 - 1.400$

$\underline{\underline{4.504,56}}$

Ergebnis: Bei der Tilgung von Annuitäten bilden die Tilgungsbeträge eine geometrische Folge, und es gilt

↳ Fortwährendes Multiplizieren mit einem konstanten Faktor

$$\boxed{T_{n^*} = T_1 \cdot q^{n^* - 1}}$$

Aufgabe 12

neue Abwandlung

€ 20 000,— sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in sechs Jahren zu tilgen, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei bleiben sollen.

Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen…

Tilgungsfreie Jahre sollen die Liquidität des Kreditnehmers schonen. In tilgungsfreien Jahren fallen nur die Zinsen als Zahlungsbelastung an.

Geg.: $K_0 = 20.000$, $p = 7$, $q = 1,04$

$n = 6$ Gesamtlaufzeit

davon $n_1 = 2$ tilgungsfrei

davon $n_2 = 4$ mit T

1. $T = \frac{K_0}{n_2}$ $\quad T = \frac{20000}{4} = 5000$

2. **Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:**

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1	20.000	1400	–	1400
2	20000	1.400	–	1400
3	20000	1400	5.000	6.400
4	15000	1050	5.000	6.050
5	10000	700	5.000	5700
6	5000	350	5.000	5.350

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5
Tilgung zu konstanten Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

1) geg.: $K_0 = 10.000.000$ $n = 40$

$p = 11$ $q = 1{,}11$

a) Annuität berechnen

$$A = \frac{K_0 q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$A = \frac{10\,000\,000 \cdot 1{,}11^{40}}{\frac{1{,}11^{40} - 1}{1{,}11 - 1}} = \underline{\underline{1.117.187{,}67}}$$

b) Z_1 berechnen

$$Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$Z_1 = 10.000.000 \cdot \frac{11}{100} = \underline{\underline{1.100.000}}$$

c) T_1 berechnen

$$T_1 = A - Z_1$$

$$T_1 = 1.117.187,27 - 1.100.000$$

$$= \underline{\underline{17.187,27}}$$

d) T_{32} berechnen

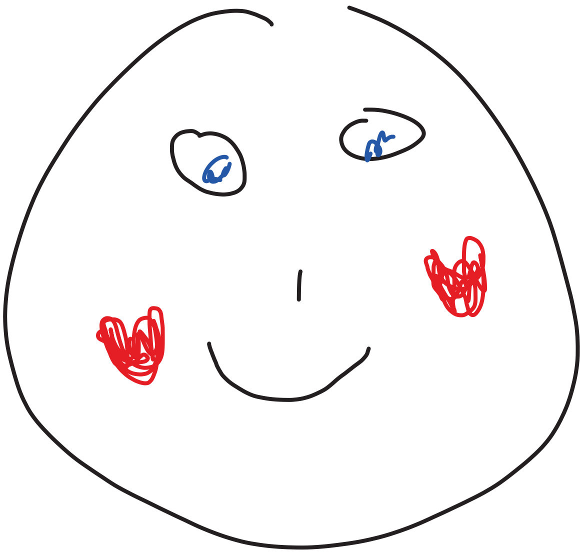
$$T_{n^*} = T_1 \, q^{n^* - 1}$$

$$T_{32} = T_1 \, q^{32-1}$$

$$T_{32} = 17.187{,}27 \cdot 1{,}11^{31}$$

$$= \underline{\underline{436.736{,}25}}$$

Saz



Rentenrechnung spezial

Projektaufgaben

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,— zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,— sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

K

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

unterjährige Zahlungen bei jährlicher Verzinsung

Datenlage:

Auseinanderfallen von Zinsperiode und Zahlungsperiode

r_2^* : unterjähriger Zahlungsbetrag

ZW : nachschüssig | vorschüssig

m : Anzahl der unterjährigen Perioden

→ monatlich $m = 12$

→ quartalsweise $m = 4$

→ halbjährlich $m = 2$

→ alle 2 Monate $m = 6$

→ alle 4 Monate $m = 3$

n : Gesamtlaufzeit

p : Zinsfuß q : Aufzinsungsfaktor

Lösungsstrategie

① Transformation der n-maligen unterjährigen Zahlungen r^* in einen einmalig am Jahresende erfolgenden Betrag, und zwar

$$r_{bsr} = r^* \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

wenn r^* zuvor vorschüssig gezahlt wurde.

bzw.

Formelinstrumentarium:

$$k_{nach} = k^* \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

wenn k^* zuvor nachschüssig gezahlt wurde

Zwei Bemerkungen

(a.) k_{vor} und k_{nach} sind nachschüssige Beträge

(b.) k_{vor} und k_{nach} ist quasi das Kapital am Ende des 1 Jahres, als Summe aus den eingezahlten Beträgen k^* und den erworbenen Zinsen.

siehe Notiz S. 37

Projektaufgaben

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

unterjährige Zahlung, jährliche Verzinsung

Formeln 2.5

a)

ges.: $r^* = 2000$ $\quad m = 12$

ZW: vorschüssig

$p = 6$ $\quad q = 1{,}06$ $\quad n = 10$

ges.: K_{10} über r_{vor}

Lös.: 1. Transformation

$$r_{vor} = r^* \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

$$r_{e} = 2000 \left(12 + \frac{12+1}{2} \cdot \frac{6}{100} \right)$$

$$= \underline{\underline{24.780}}$$

2) Hochrechnung

$$K_n = r_{e} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{10} = 24780 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1}$$

$$= \underline{\underline{326.620{,}10}} \quad \text{Satz} \ldots$$

b) in den Notizen S. 37ff.

Zusatzaufgaben
Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

Fall Formel 2.5

geg.: $R^* = 2000$ $m = 4$ vorschüssig

$n = 8$ $p = 4$ $q = 1{,}04$

ges.: K_8 (über R_{vor})

Lös.: $R_{vor} = R^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$

$$R_{vor} = 2000\left(4 + \frac{4+1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right)$$

$$= 8200$$

$$K_n = R_{vor} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_8 = 8200 \cdot \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} = \underline{\underline{75.556{,}66}}$$

Satz ...:

2) geg.: wie oben aber

$r^* = 1{,}050 \quad m = 2$ nachschüssig

ges.: K_n (über r_{max})

Lös.: $r_{max} = r^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$

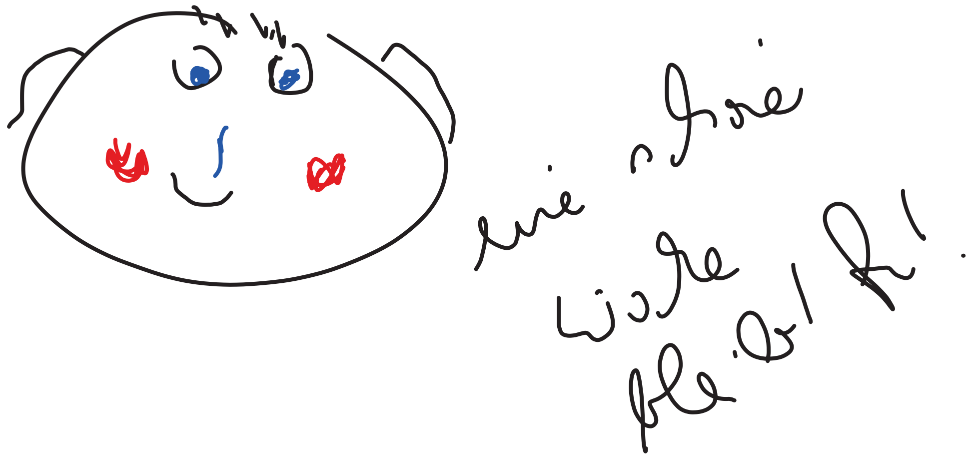
$$r_{max} = 1050 \cdot \left(2 + \frac{2-1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right) = \underline{\underline{2121}}$$

$$K_n = r_{max} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_8 = 2121 \cdot \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} = \underline{\underline{19{,}543{,}37}}$$

Jetzt ...

ewige Rente:



Datenlage:

Formelinstrumentarium:

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,— zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

    a) am Anfang
    b) am Ende

    eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,— sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Platz für Notizen

7.) Hochrechnung auf n Perioden mit Hilfe der Formel für den Endwert einer nachschüssigen Rente

$$K_n = R_{bzw.} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

bzw.

$$K_n = R_{nach} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

siehe Formelsammlung 2.5

b) geg.: wie oben, aber nachschüssig

ges.: K_n über r_{nach}

<u>Lsg.:</u> 1. Transformation

$$r_{nach} = r^* \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

$$r_{nach} = 2000 \left(12 + \frac{12-1}{2} \cdot \frac{6}{100} \right)$$

$$= \underline{\underline{24.660}}$$

2. Hochrechnung auf 10 Jahre

$$K_n = r_{nach} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>TR</u>: $2000 \cdot (12 + 11 : 2 \times 6 : 100) =$

$$K_{10} = 24.160 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1}$$

$$= \underline{\underline{325.038{,}40}} \quad // \quad SOZ$$