

## Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

$K_0$  : Anfangswert, Startwert, Barwert

$K_n$  : Zeitwert, Endwert

$n$  : Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)

$p$  : Zinsfuß

$q = 1 + \frac{p}{100}$  : Aufzinsungsfaktor

$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$  : Abzinsungsfaktor

$k$  : laufende Einzahlung ( $k > 0$ ),  
laufende Auszahlung ( $k < 0$ )

$m$  : Anzahl der Perioden innerhalb einer  
Periode

## Entscheidungsrechnung

15. Ferdinand Müller ist von seiner Firmenleitung mitgeteilt worden, dass seine Firma zum 31.12. ihren Betrieb einstellen muss. Der vom Betriebsrat ausgehandelte Sozialplan sieht für Herrn Müller, der zurzeit € 60 000,- jährlich verdient, folgende drei Möglichkeiten vor:

- a) bis zu seinem Renteneintritt in zwölf Jahren jährlich zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,-
- b) zehn Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 35 000,-
- c) fünf Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,- und zu Beginn des sechsten Jahres eine einmalige Abfindung in Höhe von € 170 000,-.

Welcher Vorschlag ist für Herrn Müller der günstigste, wenn ein marktüblicher Zins von 5% p.a. unterstellt wird?

16. Ein Golfclub möchte ein neues Vereinshaus bauen, an dessen Finanzierung sich die Clubmitglieder beteiligen sollen. Der Vereinsvorstand schlägt deshalb folgende Finanzierungsmodelle vor:

**Vorschlag 1:**

die Mitglieder zahlen elf Jahre lang, jeweils am Anfang eines Jahres, € 1 800,- an den Verein

**Vorschlag 2:**

die Mitglieder zahlen vierzehn Jahre lang, jeweils am Ende eines Jahres, € 1 650,- an den Verein.

- a) Welche Alternative ist für die Clubmitglieder günstiger, wenn ein Zinssatz von 6,5% p. a. unterstellt wird und man annimmt, dass die Clubmitglieder möglichst wenig an ihren Verein zahlen möchten?
- b) Welchen Betrag müssten die Clubmitglieder jährlich zahlen, damit die schlechtere Alternative genauso gut wäre wie die bessere (bei gleichem Zinssatz)?

17. Sie möchten eine Eigentumswohnung verkaufen und erhalten zwei Angebote:

Angebot A: € 20 000,- sofort, € 20 000,- nach zwei Jahren und € 10 000,- nach fünf Jahren

Angebot B: € 16 000,- sofort, € 25 000,- nach drei Jahren und € 10 000,- nach vier Jahren.

Welches Angebot ist günstiger, wenn der marktübliche Zinssatz

- a) 3% p.a.
- b) 5% p.a.

beträgt? Erklären Sie das erhaltene Ergebnis!

Allgemeine Bemerkungen:

Ziel:  $f_{101}$ ,  $f_{01}$ ,  $f_{10}$  ...

je mehr am Ende herauskommt, umso besser ist es.

Konsequenz: " Es gilt keine wirkliche

Präferenzen.

Lösungsweg: Alle Alternativen sind auf einen einheitlichen Zeitpunkt zu bringen, um die Alternativen vergleichbar zu machen.

z. B. könnte man in die Auf-  
gabe 15 jeweils  $K_{12}$   
ermitteln (längster  
gemeinsamer Zeithorizont)

Vorsatz a)

ges:  $p = 5$   $q = 1,05$   $n = 12$

$k = 30.000$   $K_0 = 0$  Vorsparnis

ges:  $K_{12}$

Lsg:  $K_n = K_0 q^n + k \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$K_{12} = \overset{=0}{0 \cdot 1,05^{12}} + 30000 \cdot 1,05 \frac{1,05^{12} - 1}{1,05 - 1}$

$$= \underline{\underline{501.389,49}}$$

Vordlog b)

geg: monatlich,  $k = 35000$

$$P = 5 \quad f = 1,05 \quad K_0 = 0 \quad n = 10$$

geg:  $K_{12}$  über  $K_{10}$

verwende  $K_{10}$  für 2 Jahre

Lös: 
$$K_n = K_0 q^n + k \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{10} = 0 \cdot 1,05^{10} + 35000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1}$$

$$= \underline{\underline{440.226,24}}$$

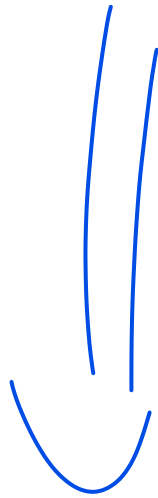
bestimme  $K_{12}$  für zwei Jahre

$$K_{12} = K_{10} \cdot q^2$$

$$K_{12} = 440.226,24 \cdot 1,05^2$$

$$= \underline{\underline{485.349,43}}$$

Kon-  
stanzial  
ist besser



15. Ferdinand Müller ist von seiner Firmenleitung mitgeteilt worden, dass seine Firma zum 31.12. ihren Betrieb einstellen muss. Der vom Betriebsrat ausgehandelte Sozialplan sieht für Herrn Müller, der zurzeit € 60 000,- jährlich verdient, folgende drei Möglichkeiten vor:

- a) bis zu seinem Renteneintritt in zwölf Jahren jährlich zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,-
- b) zehn Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 35 000,-
- c) fünf Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,- und zu Beginn des sechsten Jahres eine einmalige Abfindung in Höhe von € 170 000,-.

Welcher Vorschlag ist für Herrn Müller der günstigste, wenn ein marktüblicher Zins von 5% p.a. unterstellt wird?

Vorschlag c

5 Jahre verdienen  
K<sub>5</sub> e<sub>5</sub>  
K<sub>5</sub> e<sub>5</sub>  
Einmalzahlung: zu Beginn des  
sechsten Jahres →  
finanzmathe nach 5 Ende  
des 5. Jahres K<sub>5</sub>-einmalig



(a)

Berechne  $K_5$ -eff

geg:  $K_0 = 0$   $b_2 = 30000$   $n = 5$

$P = 5$   $q = 1,05$   $\text{Vordins: } 5$

ges:  $K_5$ -eff

$$\text{Lsg: } K_n = K_0 q^n + b_2 q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{5\text{-eff}} = 0 \cdot 1,05^5 + 30000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{1,05 - 1}$$

$$= \underline{\underline{174.057,38}}$$

b) Berechne  $K_5$ -gesamt

$$K_{5\text{-gesamt}} = K_{5\text{-eff}} + K_{5\text{-einmal}}$$

$$K_{5\text{-gesamt}} = 174.057,38 + 170.000$$

$$= \underline{\underline{344.057,38}}$$

c) Berechne  $K_{12}$ , bezw.  $K_5$   
für 7 Jahre

$$K_{12} = K_{5\text{-gesamt}} \cdot 1,05^7$$

$$K_{12} = 344.057,38 \cdot 1,05^7 =$$

$$= \underline{\underline{484.123,28}}$$

Wir entscheiden uns für  
Vorstellung)









17. Sie möchten eine Eigentumswohnung verkaufen und erhalten zwei Angebote:

Angebot A: € 20 000,- sofort, € 20 000,- nach zwei Jahren und € 10 000,- nach fünf Jahren

Angebot B: € 16 000,- sofort, € 25 000,- nach drei Jahren und € 10 000,- nach vier Jahren.

Welches Angebot ist günstiger, wenn der marktübliche Zinssatz

a) 3% p.a.

b) 5% p.a.

beträgt? Erklären Sie das erhaltene Ergebnis!

e) Rechnung bei 3%

3 Einmalzahlungen (Leibniz)

kurzester Zeitintervall 5 Jahre

Angebot A

20000 sofort

20000  
nach 2 Jahre

10000  
nach 5 Jahre

3 mal  
bezahlen

3 mal  
behalten

1 mal  
behalten

$$K_{5-A} = 20000 \cdot 1,03^5 + 20000 \cdot 1,03^3 + 10000$$

$$= \underline{\underline{55.040,02}}$$

Angebot B

16000 sofort

25000

10000

nach 3 Jahre

nach 4 Jahre

für 5 Jahre

für 2 Jahre

für 1 Jahr

$$K_{5-B} = 16000 \cdot 1,03^5 + 25000 \cdot 1,03^2 +$$

$$10000 \cdot 1,03 = \underline{\underline{55.370,89}}$$

Bei 3% Jahreszinsen ist Variante B

besser.



b) Rechnung bei 5%

Vorsicht A

$$\begin{aligned}K_{5-A} &= 20000 \cdot 1,05^5 + 20000 \cdot 1,05^3 + 10000 \\ &= \underline{\underline{58.678,13}}\end{aligned}$$

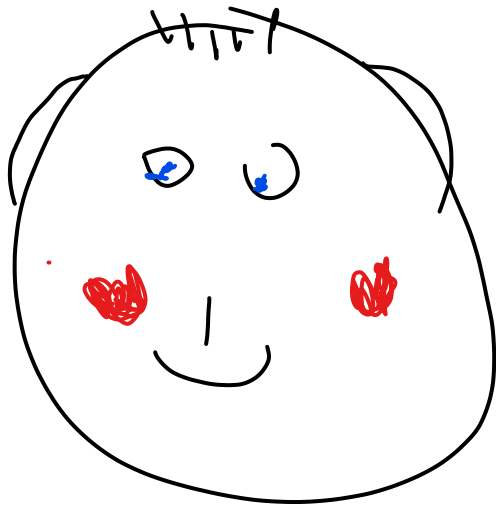
Vorsicht B

$$\begin{aligned}K_{5-B} &= 16000 \cdot 1,05^5 + 21000 \cdot 1,05^2 + 10000 \cdot 1,05 \\ &= \underline{\underline{58.483,01}}\end{aligned}$$

Bei 5% Jahreszinsen ist Angebot A  
besser.

Do Zahlungen in unterschiedliche  
Stufe zu unterschiedlicher Zeit.

Punkte anfallen, kann die  
jüngste Zeit vor eine Alternative  
auf die andere wechseln.



zur Zeit  
bleibt





