

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung ($k > 0$), laufende Auszahlung ($k < 0$)
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

Notation:

K_0 : Kapital zu Beginn

Barwert

auf den heutige Zeitpunkt
bezogener Wert

K_n : Kapital nach n Perioden

Endwert / Zeitwert

n : Anzahl der Perioden



P: Zinssfuß, Zinssatz

... 5% p.a. $P = 5$

für das Jahr

per annum

pro anno

... 2,25% p.a. $P = 2,25$

... 12% p.a. $P = 12$

$$F = 1 + \frac{P}{100} \quad \text{Aufzinsungsfaktor}$$

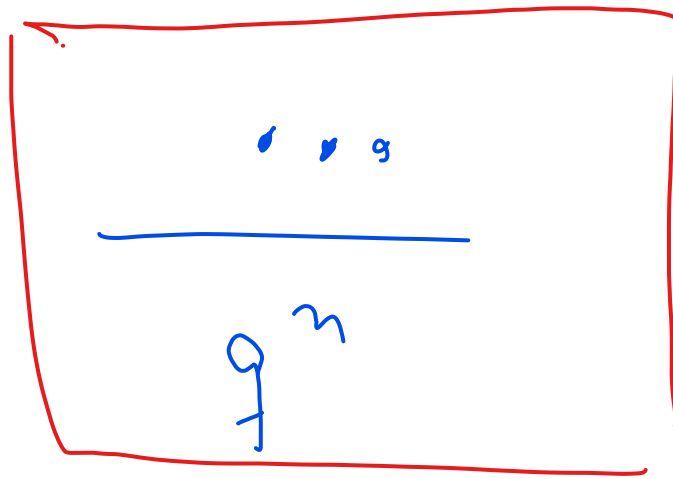
neues
Kapital = altes
Kapital + Zinsen

$$P = 5 \quad \Rightarrow \quad F = 1,05$$

$$P = 2,25 \Rightarrow q = 1,0225$$

$$P = 12 \Rightarrow q = 1,12$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{P}{100}} \quad \text{Abwinklung } P\%$$



n Perioden
zurückrechnen

q^n
Perioden
abwinkeln

div? on herem

b_2 : laufende (ld.) Zahlung (Rente)

$b_2 > 0$ Einzahlung

\Rightarrow geldfluss

$k_2 < 0$ Auszahlung

\Rightarrow Geldabfluss

m , Anzahl der Perioden innerhalb eines Jahres

\rightarrow monatlich $m = 12$

\rightarrow quartalsweise $m = 4$

\rightarrow halbjährlich $m = 2$

\rightarrow alle 2 Monate $m = 6$

\rightarrow täglich $m = 360$

(12 Monate $\hat{=}$ 30 Tage)

\rightarrow stündlich $m = 8640$

360×24 5

Zinseszinsrechnung

Modell:

- Zinsen werden periodenweise gezahlt.
- Zinsen werden dem Kapital am Ende der Periode zugeschlagen
- Verzinsungsdauer ist ein ganzzahliges Vielfaches der Zinsperiode

diese Seite bleibt aus
technischen Gründen frei.

Formeln:

auf eine längere Darstellung
der Formel wird bewusst
verzichtet

Selbuz - Formel

$$K_m = K_0 \cdot q^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m$$

Bestandteile:

$K_m, K_0, m, (p, q)$

$$K_m = K_0 \cdot q^m$$

Exponent,
Rechengröße

Index
Indizes

Ordnungsgrößen,
keine Rechengrößen

Frage noch...

$$\dots K_n : K_n = K_0 q^n$$

$$\dots K_0 : K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

$$\dots n : n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)} = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(q)}$$

$$\dots q : q = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1) \cdot 100$$

~~≠~~
nicht NICHT
9
unter der Wurzel

diese Seite bleibt an technische
Freude sein

Aufgaben

1. Herr Debeuk legte am 01.01.2020 € 800,- mit einem Zinssatz von 5% p. a. an. Über welchen Betrag kann er Ende 2024 verfügen?
2. Herr Debeuk überlegt, welchen Betrag er heute anlegen muss, um nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 6% p. a. € 2 000,- ausgezahlt zu bekommen?
3. Herr Debeuk bringt € 800.- zur Bank und erhält eine Verzinsung von 8% p. a.. Wie lange muss er das Geld anlegen, um mindestens € 1 100,- zu besitzen?
4. Paul hat vor sechs Jahren € 500.- zur Bank gebracht Heute hat er bei Zinseszinsen € 597,- auf seinem Konto. Wie hoch ist der Zinsfuß p?

Projektaufgaben

Aufgabe 1) Unterschiedliche Zinssätze

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,- wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst.

- a) Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?
- b) Am Ende des vierten Jahres benötigen Sie € 27 962,94. Wie hoch muss dann Ihr Guthaben Ende der zweiten Periode mindestens sein?
- c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß!

Aufgabe 7) **Gemischte Verzinsung**

Am 25. Juni 2018 wurden € 1.000,-- zu einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 12. April 2033?

Aufgabe 8) **Gemischte Verzinsung**

Am 24. Juli 2020 wurden € 3.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 18. April 2035 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 2020 berücksichtigt?
Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:
2. Wie viele Tage werden für das Jahr 2035 berücksichtigt?
Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:
3. Der Auszahlungsbetrag beträgt: **Bitte wählen Sie eine Antwort, kennzeichnen Sie am besten durch ein kleines x oder ein großes X.**
 - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.158,67.
 - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.160,36.
 - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.159,52
 - Keiner der angegebenen Werte stimmt (Rundungsdifferenzen bis zu € 0,10 sind unerheblich.).

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 6

Ein Kapital in Höhe von € 10.000,-- werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit 7,75%, im sechsten bis zehnten Jahr mit 10% und im elften bis 17. Jahr mit 12% verzinst.

1. Berechnen Sie K_{17} !
2. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 1.!
3. Ende des 15. Jahres benötigen Sie € 80.000.--. Wie hoch muss dann Ihr Kapital Ende des vierten Jahres mindestens sein?
4. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 3.!

$$K_n, K_0, (p, q), n$$

Aufgaben

1. Herr Debeuk legte am 01.01.2020 € 800,- mit einem Zinssatz von 5% p. a. an. Über welchen Betrag kann er Ende 2024 verfügen?

Ges.: $K_0 = 800$ $n = 5$
 $p = 5$ $q = 1,05$

Ges.: K_n (K_5)

Lös.: $K_n = K_0 q^n$

$$K_5 = 800 \cdot 1,05^5$$
$$= \underline{\underline{1021,03}}$$

Keine

Klammer!!!

Schluss -

setz es für die Li.:

$1,05^5$ Potenzen

$$x^0 \quad 1,05 \quad x^4 \quad x^5$$
$$1,05 \quad \wedge \quad 5$$

Ende 2024 verfügbar Herr D. über
€ 1.021,03.

$$K_m, K_0, (p, f), n$$

2. Herr Debeuk überlegt, welchen Betrag er heute anlegen muss, um nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 6% p. a. € 2 000,- ausgezahlt zu bekommen?

geg.: $K_{10} = 2.000$ $n = 10$

$$p = 6 \quad f = 1,06$$

ges.: K_0

Lös. $K_0 = \frac{K_m}{f^n}$ keine Klammern!!

$$K_0 = \frac{2000}{1,06^{10}} = \underline{\underline{1.116,79}}$$



Herr D muss heute € 1.116,79

anlegen.

$$K_n, K_0, (P, q), n$$

3. Herr Debeuk bringt € 800.- zur Bank und erhält eine Verzinsung von 8% p. a.. Wie lange muss er das Geld anlegen, um mindestens € 1 100,- zu besitzen?

ges.: $K_n = 1.100$ $K_0 = 800$

$$P = 8 \quad q = 1,08$$

ges.: n

Lös.: $n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)}$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1100}{800}\right)}{\ln(1,08)} = 4,1\dots$$

Es dauert 5 Jahre.

immer
aufwenden

nach 4 Jahren...

$$K_4 = 800 \cdot 1,08^4 = 1.088,39$$

Ziel noch nicht

erreicht...

nach 5 Jahren

$$K_5 = 800 \cdot 1,08^5 = 1.175,46$$

Ziel erreicht.

$$\left(\log(1100 : 800) : \log(1,08) = \right)$$

$$K_n, K_0, (p, q), n$$

4. Paul hat vor sechs Jahren € 500,- zur Bank gebracht Heute hat er bei Zinseszinsen € 597,- auf seinem Konto. Wie hoch ist der Zinsfuß p?

geg.: $n = 6$

$$K_6 = 597 \quad K_0 = 500$$

ges.: p

Lös.:
$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$p = \left(\sqrt[6]{\frac{597}{500}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$\approx 3\%$$

Der Zinsfuß beträgt rund 3% p.a.

$$\sqrt[x]{\left(\sqrt[6]{597:500} - 1 \right) \cdot 100 =$$

$$\left(\sqrt[6]{\frac{597}{500}} - 1 \right) \cdot 100 =$$

Thomas. r o chow@hotmail.de

Projektaufgaben

Aufgabe 1) Unterschiedliche Zinssätze

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,- wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst.

- Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?
- Am Ende des vierten Jahres benötigen Sie € 27 962,94. Wie hoch muss dann Ihr Guthaben Ende der zweiten Periode mindestens sein?
- Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß!

$$K_2 = ?$$

o) Zinsswischenrechnung

$$K_4 = 27.962,94$$

↳ Zwischen ...

Grundformel

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_n = K_0 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{1. Jahr}}}{q} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{2. Jahr}}}{q} \cdot \dots \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{n-tes} \\ \text{Jahr}}}{q}$$

geg: $K_0 = 10000$

$$P_1 = 3,5 \quad q_1 = 1,035 \quad n_1 = 1$$

$$P_2 = 4 \quad q_2 = 1,04 \quad n_2 = 1$$

$$P_3 = 5 \quad q_3 = 1,05 \quad n_3 = 1$$

$$P_4 = 6,5 \quad q_4 = 1,065 \quad n_4 = 1$$

$$P_5 = 7,5 \quad q_5 = 1,075 \quad n_5 = 1$$

ges.: K_5

Lös.: $K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot q \cdot q \cdot \dots$

$$K_5 = 10000 \cdot 1,035^1 \cdot 1,04^1 \cdot 1,05^1 \cdot 1,065^1 \cdot 1,075^1$$

$$= \underline{\underline{12.939,61}}$$

Satz ...

c) P_D durchschnittlicher Zinsfuß

$$n = 5 \quad K_5 = 12.939,61$$

$$K_0 = 10.000$$

$$P_D = \left(\sqrt[n]{\frac{\text{Endwert}}{\text{Anfangswert}}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$P_D = \left(\sqrt[5]{\frac{12.939,61}{10000}} - 1 \right) \cdot 100$$

$\approx \underline{\underline{5,29}}$ Der ϕ Zinsfuß beträgt rd 5,29%.

Zweite Aufgabe

Ein Kapital i. H. v. € 100,-
werde in 1. Jahr mit 10%

im 2. Jahr mit 2% und

im 3. Jahr mit 3% verzinst.

Wie hoch ist P_D ?

$$K_3 = 1000 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \cdot 1,3 = \underline{\underline{1716}}$$

$$P_D = \left(\sqrt[3]{\frac{1716}{1000}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$= \underline{\underline{19,72}}$$

Da durchschnittl.
Zinsfuß beträgt
19,72%

$$K_3 = 1000 \cdot 1,1972^3 = \underline{\underline{1715,93}}$$

20% wird mathematisch paßt, da

nicht die geometrische Mittelwert

ein Durchschnitt ist.

$$\frac{10 + 20 + 30}{3} = 20$$

$$K_3 = 1000 \cdot 1,2^3 = 1.728 \neq 1716$$



like a fine wine
bla bla bla

Aufgabe 7) **Gemischte Verzinsung**

Am 25. Juni 2018 wurden € 1.000,-- zu einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 12. April 2033?

Aufgabe 8) Gemischte Verzinsung

Am 24. Juli 2020 wurden € 3.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 18. April 2043 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 2020 berücksichtigt?

Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:

2. Wie viele Tage werden für das Jahr 2035 berücksichtigt?

Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:

3. Der Auszahlungsbetrag beträgt: **Bitte wählen Sie eine Antwort, kennzeichnen Sie am besten durch ein kleines x oder ein großes X.**

- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.158,67.
- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.160,36.
- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.159,52
- Keiner der angegebenen Werte stimmt (Rundungsdifferenzen bis zu € 0,10 sind unerheblich.).

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

HA

Aufgabe 6

Ein Kapital in Höhe von € 10.000,- werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit 7,75%, im sechsten bis zehnten Jahr mit 10% und im elften bis 17. Jahr mit 12% verzinst.

1. Berechnen Sie K_{17} !
2. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 1.!
3. Ende des 15. Jahres benötigen Sie € 80.000.--. Wiewohl muss dann Ihr Kapital Ende des vierten Jahres mindestens sein?
4. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 3.!

alle 17 Jahre

alle betroffenen Jahre

Platz für Notizen

