Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Aufgabenstellung 1

Teil 1

Sie haben einen Kredit in Höhe von € 20.000,— aufgenommen. Der Kredit ist in sechs Jahren bei einem Zinssatz von 4% p. a. unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge zu tilgen! Die ersten beiden Jahre sollen dabei tilgungsfrei bleiben Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan auf, aus dem für jedes Jahr **die Tilgungszahlung, die Zinszahlung, die Restschuld und die Gesamtzahlung** hervorgehen!

ges.: Tilgung zu konstante T-Beträgen

$K_0 = 20.000 \quad p = 4 \quad q = 1{,}04$

$n = 6$ tilgungsfrei $n_1 = 2$

mit Tilgung $n_2 = 4$

1. $T = \frac{K_0}{n_2} \qquad T = \frac{20000}{4} = \underline{\underline{5.000}}$

Jahr	Restschuld	Zinsen auf RS	Tilgung	Gesamtzahlung
1	$20.000 \cdot \frac{4}{100}$	$= 800 +$	–	800
2	20.000	800	–	800
3	20.000	800	5.000	5.800
4	15.000	600	5.000	5.600
5	10.000	400	5.000	5.400
6	5.000	200	5.000	5.200

$\boxed{\text{neue RS} = \text{alte RS} - \text{aktuelle Tilgung}}$

!!!   !!!

nur Tilgungsbeträge reduzieren die Restschuld.

Teil 2

Sie haben einen Kredit in Höhe von € 30.000,— aufgenommen. Der Kredit ist fünf Jahren bei einem Zinssatz von 2% p. a. zu tilgen. Es wurde ein endfälliges Darlehen vereinbart. Erstellen Sie den zugehörigen vollständigen Tilgungsplan, aus dem für jedes Jahr **die Tilgungszahlung, die Zinszahlung, die Restschuld und die Gesamtzahlung** hervorgehen!

ges.: $K_0 = 30000$, $n = 5$,

$p = 2$ $q = 1{,}02$

endfälliges Darlehen:

komplette Tilgung in der letzten Periode, Zinsen in jeder Periode

Jahr	Restschuld	Zins auf RS	Tilgung	Gesamtzahlung
1	30.000	600	–	600
2	30.000	600	–	600
3	30000	600	–	600
4	30.000	600	–	600
5	30.000	600	30.000	30.600

Änderungs

Teil 3
Sie haben einen Kredit in Höhe von € 10.000,— aufgenommen. Der Kredit ist in drei Jahren bei einem Zinssatz von 3% p. a. unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten zu tilgen! Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan auf, aus dem für jedes Jahr **die Tilgungszahlung, die Zinszahlung, die Restschuld und die Annuität** hervorgehen!

Tilgung zu Annuitäten

$K_0 = 70.000$ $\quad n = 10$

$p = 8$ $\quad q = 1{,}08$

- die ersten zwei Zeilen des T-planes
- Restschuld nach 8 Jahren

$$A = \frac{K_0 \, q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}} \qquad A = \frac{70000 \cdot 1{,}08^{10}}{\frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1}}$$

$$= \underline{\underline{10.432{,}06}}$$

Jahr	Restschuld	Zins auf RS	Tilgung	Annuität
1	$70000 \cdot \frac{8}{100}$	5600	4.832,06	10.432,06
2	$65.167,94 \cdot \frac{8}{100}$	5213,44	5218,62	10.432,06

$T_1 = A - Z_1 = 10432,06 - 5.600$

$\boxed{\text{neue RS} = \text{alte RS} - \text{aktuelle Tilgung}}$

Restschuld nach 8 Jahren in der

Notieren

$$K_n = K_0 q^n + r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aufgabenstellung 2

Teil 1

1. Eine nachschüssige quartalsweise erfolgende Rente beträgt € 4.444,—. Die jährliche Verzinsung ist mit 2,5% p. a. festgesetzt. Die Rentendauer ist 10 Jahre. Über welchen Betrag können Sie nach Ablauf der 10 Jahre verfügen?
2. Welcher Betrag ergibt sich bei gleicher Laufzeit und gleichem Zinsfuß, wenn Zahlungen in Höhe von € 8.840,— vorschüssig und halbjährlich geleistet werden?

unterjährige Zahlungen, jährliche Verzinsung

1) geg.: $r^* = 4444$ $\quad p = 2,5$

$q = 1,025$

$m = 4$

$n = 10$

ZW: nachschüssig

ges.: K_{10} (über r_{nach})

Lös.: $r_{nach} = r^* \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$

$r_{nach} = 4444 \cdot \left(4 + \frac{(4-1)}{2} \cdot \frac{2,5}{100} \right)$

$= 17.942,65$

$$K_{10} = 17947{,}65 \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{1{,}025 - 1}$$

$$= \underline{\underline{201018{,}36}} \, //$$ Satz

2) Geg.: wie oben

$r^* = 8.840$ $\quad m = 2$ vorschüssig

Ges.: K_{10} (über r_{ver})

Lös.: $$r_{ver} = r^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$$

$$r_{ver} = 8840 \cdot \left(2 + \frac{2+1}{2} \cdot \frac{2{,}5}{100}\right)$$

$$= 18.011{,}50$$

$$K_n = r_{ver} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Teil 2
Auf welchen Betrag ist ein Kapital in Höhe von € 1.234,– angewachsen, wenn die Bank vier Jahre lang 2,3% Zinseszinsen gewährt?

$$K_{10} = 18.011{,}50 \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{1{,}025 - 1}$$

$$= \underline{\underline{201.789{,}71}}$$

Satz ..

Teil 2

~~Ges~~: $K_0 = 1.234 \quad n = 4$

$p = 2{,}3 \quad q = 1{,}023$

Ges.: K_4

Lös.: $K_n = K_0 q^n$

$$K_4 = 1234 \cdot 1{,}023^4 = \underline{\underline{1.351{,}51}}$$

Satz ..

Aufgabenstellung 3

1. Auf welchen Betrag ist ein Kapital in Höhe von € 10.000,— angewachsen, wenn die Bank zunächst 3 Jahre lang 2%, danach 5 Jahre lang 3% und schließlich 7 Jahre lang 4% Zinseszinsen gewährt?
2. Welchen Betrag muss ein Kapital Ende des vierten Jahres mindestens haben, wenn unter oben gegebenen Bedingungen Ende des zwölften Jahres € 20.000,— benötigt werden?
3. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den gesamten Zeitraum!

1) Geg.: $K_0 = 10.000$

$p_1 = 2$ $\quad q_1 = 1,02$ $\quad n_1 = 3$

$p_2 = 3$ $\quad q_2 = 1,03$ $\quad n_2 = 5$

$p_3 = 4$ $\quad q_3 = 1,04$ $\quad n_3 = 7$

$ 15$

Ges.: K_{15}

Lös.: $K(15) = 10000 * 1,02 \wedge 3 * 1,03 \wedge 5 * 1,04 \wedge 7 = \underline{\underline{16.189}}$

So..

3.) $P_D = \left(\sqrt[n]{\frac{\text{Endkapital}}{\text{Anfangskapital}}} - 1 \right) \cdot 100$

$$P_D = \left(\sqrt[15]{\frac{16.189}{10000}} - 1 \right) \cdot 100$$

$= 3{,}26\ \%.$

Satz . .

Denkbar für 4 Answer (MC)

- P_D beträgt . .
- P_D " . . .
- P_D lässt sich aus der Angabe nicht berechnen

2) Wir müssen abzinsen K_4 liegt vor K_{12}.

Geg.: $K_{12} = 20000$ Zinssätze wechseln

Ges.: K_4 relevant Jahre 5 bis 12

8 Jahre

Zins.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		2				3								4	

$p_2 = 3 \quad q_2 = 1{,}03 \quad n_2 = 4$

$p_3 = 4 \quad q_3 = 1{,}04 \quad n_3 = 4$

$$K_4 = \frac{20000}{1{,}03^4 \cdot 1{,}04^4} = \underline{\underline{15.189{,}65}}$$

Satz ...

Rentenrechnung K_0 K_n r n

p, q ZW

Aufgabenstellung 4

Teil 1

Sie müssen nach Ablauf von acht Jahren € 20.000,— leisten. Welchen Betrag müssen Sie dafür jährlich zurücklegen, um bei einer Verzinsung von 1,75% p. a. über den erforderlichen Betrag zu verfügen, wenn Sie die notwendigen Einzahlungen jeweils

1. zu Beginn des Jahres vornehmen und Sie bereits € 5.000,— angesammelt haben?
2. zu Ende des Jahres vornehmen, wenn Sie noch nichts angesammelt haben?

1) geg.: $n = 8$ $p = 1{,}75$ $q = 1{,}0175$

$K_8 = 20.000$ $K_0 = 5000$ vorschüssig

ges.: r

Lös.: $r = \dfrac{K_n - K_0 q^n}{q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$

$r = \dfrac{20.000 - 5000 \cdot 1{,}0175^8}{1{,}0175 \cdot \dfrac{1{,}0175^8 - 1}{1{,}0175 - 1}}$

$= 1.646,82$

Satz

2) ges.: wie oben, aber nachschüssig, $K_0 = 0$

ges.: r

Lös.:

$$r = \frac{K_n - K_0 q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$r = \frac{20000 - 0 \cdot 1{,}0175^8}{\frac{1{,}0175^8 - 1}{1{,}0175 - 1}} = 2350{,}86$$

Satz ...

geändert

Anfang

Teil 2

Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine am ~~Ende~~ eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente von € 10.000,— bei einem Zinssatz von 3,7% sichergestellt sein soll?

Geg.: $R = 10.000$ ZW: Verzinsung

$p = 3,7$

$q = 1,037$

Ges.: K_0

Lös.: $K_0 = \dfrac{R \cdot q}{q-1}$

$K_0 = \dfrac{10000 \cdot 1,037}{1,037-1}$

$= 280.270,27$

Satz

zu 9 80% 3 Aufgaben à 20 Pkt!

Aufgabenstellung 5

Teil 1

Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2020 (nach der Zinszahlung für 2020) € 20.000, —. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2021 vier Jahre lang am **Ende** eines jeden Jahres € 3.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine **zweite Phase**, in der er das vorhandene Kapital drei Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto vier Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 9.000, —. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der elf Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 1,6% p. a. aus!

Rentenrechnung

Verzinsung

Rentenrechnung

Teil 2

Sie möchten eine Eigentumswohnung verkaufen und erhalten zwei Angebote:

> Angebot A: € 20.000,— sofort, € 20.000,— nach zwei Jahren und € 10.000,— nach fünf Jahren
>
> Angebot B: € 16.000,— sofort, € 25.000,— nach drei Jahren und € 10.000,— nach vier Jahren.

Welches Angebot ist günstiger, wenn der marktübliche Zinssatz 3,47% p.a. beträgt?

$p = 3{,}47 \qquad q = 1{,}0347$

thomas.rochow@hotmail.de

Entscheidungsrechnen ...

Aufgabenstellung 6

Teil 1

Welches Angebot ist bei 7% Zinseszins das höchste:

Angebot 1: sofort einmalig € 10.000,—
Angebot 2: zu Ende des vierten Jahres einmalig € 13.000,—
Angebot 3: acht Jahre lang nachschüssig € 1.700,—
Angebot 4: eine ewige nachschüssige Rente i. H. v. € 685,—

Entscheidungsrechnen ...

alle Alternative auf einen einheitl. Zeitpunkt beziehen ... jeweils K_0

Angebot 1 $\quad K_{0-1} = \underline{\underline{10000}}$

Angebot 2 $\quad$ ges.: K_{0-2}

geg.: $K_4 = 13000 \quad p = 7$

$n = 4 \quad q = 1{,}07$

Lös.: $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n}$

$$K_{0-2} = \frac{13000}{1{,}07^4} = \underline{\underline{9.917{,}64}}$$

Aufgabe 3 ges.: K_{0-3}

geg.: $n = 8$ $p = 7$ $q = 1{,}07$

$r_2 = 1.700$ $K_8 = 0$

Zwischenlösung

Lös.: $K_0 = \dfrac{K_n - r_2 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$

$K_{0-3} = \dfrac{0 - 1700 \dfrac{1{,}07^8 - 1}{1{,}07 - 1}}{1{,}07^8}$!!!

mit Mt $= 10.151{,}21$

vergessen ...

Angebot 4 ges.: K_{0-4}

geg.: ewige Rente $r_2 = 685$

$p = 7$ $q = 1{,}07$ nachschüssig

Lös.: $K_0 = \dfrac{r_2}{q-1}$

$$K_{0-4} = \frac{685}{1{,}07-1} = \underline{\underline{9.785{,}71}}$$

Entscheidung für Angebot 3.

Teil 2

Am 24. Juli 2018 wurden € 2.000,-- zu einem Zinssatz von 3 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 23. Mai 2033 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 20~~20~~18 berücksichtigt?
   Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:

2. Wie viele Tage werden für das Jahr 20~~35~~33 berücksichtigt?
   Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:

3. Ermitteln Sie die Höhe des Kapitals bei Auflösung!

K

nach deutscher Methode

11 Monate à 30 Tage

1 Tag zählt nicht mit   156 Tage

letzter Tag zählt mit   143 Tage

120 Tage Jan – Apr
23 Tage Mai

143 Tage

$$2000 \cdot \left(1 + \frac{156}{360} \cdot \frac{3}{100}\right) \cdot 1{,}03^{14} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{143}{360} \cdot \frac{3}{100}\right) =$$

3.101,23 Setz

mir geht Wohl

bla!! R!