

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

K_0 : Anfangswert, Startwert, Barwert

K_n : Zeitwert, Endwert

n : Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)

p : Zinsfuß

$q = 1 + \frac{p}{100}$: Aufzinsungsfaktor

$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$: Abzinsungsfaktor

k : laufende Einzahlung ($k > 0$),
laufende Auszahlung ($k < 0$)

m : Anzahl der Perioden innerhalb einer
Periode

k : laufende Zahlungen

$k > 0$ Einzahlung

feld einfluss

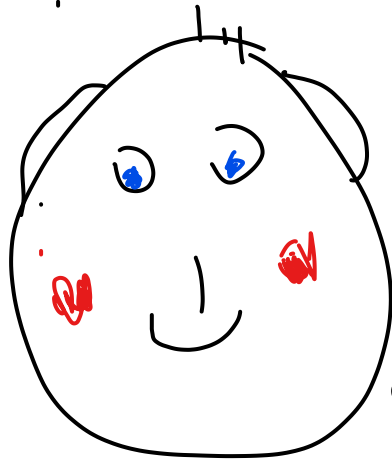
$k < 0$ Auszahlung

feld abfluss

Rentenrechnung

Modell und Grundformeln:

gegeben sei ein Kapital K_0 , das
zu fest vereinbarten Zeitpunkten
um ein festes Betrag R
erhöht (Einzahlung) oder
vermindert (Auszahlung)
wird.



pure fact
bleibt
für

fest vereinbarte Zeitpunkte

Fall 1:

Zahlungen erfolgen am Periodenende

→ nachschüssig

→ nachschüssige Zahlungsweise (ZW)

Fall 2:

Die Zahlungen erfolgen am Periodenanfang

→ vorschüssig

modulus & Zahlungsweise

$$K_n = K_0 q^n + k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Anfangs
Kapital

lfd.
Zahlungen

variante Zahlungsweise

$$K_n = K_0 q^n + k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Anfangs-
Kapital

lfd.

Zahlungen

K wird vermindert

$K_n, K_0, (p, q), n, k, ZW$

Aufgaben

8. Familie Debeuk hat sich entschlossen, eine zusätzliche Versicherung abzuschließen. Der Vertrag besagt, dass an jedem Quartalsende € 100,- an die Versicherung gezahlt werden müssen. Über welchen Betrag könnte Familie Debeuk nach zwölf Jahren verfügen, wenn sie die Prämie alternativ, d. h. jeweils am Quartalsende, zu einem Quartalszins von 1% angelegt hätte?
9. Ein Maurer, der von einem Gerüst gestürzt ist, soll zu Beginn eines jeden Jahres eine Rente in Höhe von € 2 400,- erhalten. Welche einmalige Abfindung hat seine Baufirma jetzt zu leisten, wenn man annimmt, dass die Rente zwanzigmal ausgezahlt wird und der Zinssatz 5,5% p. a. beträgt?
10. Es ist der Betrag zu bestimmen, den ein Unternehmen am Ende einer jeden Zinsperiode in einen Fond einzahlen muss, um nach Ablauf von acht Jahren Ausrüstungen im Wert von € 40 000,- ersetzen zu können. Der Restwert der Anlagen wird vernachlässigt und der Halbjahreszinssatz beträgt 4%.
Abwandlung 1: Welcher Betrag ergibt sich bei vorschüssiger Zahlungsweise?
Abwandlung 2: Es sind bereits € 11 555,- vorhanden. Welcher vorschüssige Betrag ergibt sich nun?
11. Auf einem Sparkonto befanden sich am 31.12.2018 € 20 000,-. Folgende Beträge wurden bzw. werden nachschüssig eingezahlt: 2019 bis einschließlich 2025 wurden bzw. werden jeweils am Jahresende € 5 000,- eingezahlt. Ab 2026 wird jährlich eine nachschüssige Rente ausgezahlt: 2026 bis einschließlich 2030 werden jeweils € 7 000,- entnommen. Wie groß ist das Sparguthaben nach der letzten Ratenzahlung bei einem Zinssatz von 7% p. a.?

Projektaufgaben

Aufgabe 2) Finanzpläne

Um einen älteren Manager anwerben zu können, ist ein Unternehmen auf eine Pensionszulage eingegangen. Der betreffende Manager wurde zum 01.01.2019 eingestellt und soll ab 01.01.2023 eine Pensionszahlung von € 10 000,- pro Jahr zu Beginn des Jahres für die nächsten fünf Jahre ausgezahlt bekommen. Legen Sie im Folgenden einen Zinssatz von 6% p. a. zugrunde.

- Welcher Betrag muss für den vorliegenden Rentenfall zurückgestellt werden, d. h. Ende 2022 zur Verfügung stehen?
- Berechnen Sie die Zuführungen zu den Pensionsrückstellungen pro Periode (nachschüssige und konstante Einzahlungen am Jahresende)!
- Stellen Sie den vollständigen Finanzplan auf, der den gesamten Vorgang beschreibt!

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 1

Abwandlung zu Aufgabe 8

Welcher Betrag ergibt sich, wenn die Zahlungen vorschüssig erfolgen?

Aufgabe 2

Abwandlungen 1 zu Aufgabe 11

Abwandlung 1: Alle Zahlungen erfolgen vorschüssig

Abwandlung 2: Einzahlungen erfolgen vorschüssig,
Auszahlungen erfolgen nachschüssig

Abwandlung 3: Einzahlungen erfolgen nachschüssig (7 Jahre),
danach 6 Jahre ohne Zahlungen (reine Verzinsung),
Auszahlungen erfolgen vorschüssig (5 Jahre)

Aufgabe 3

Abwandlungen 2 zu Aufgabe 11

Abwandlung 1: Zinssatz 9% p. a.

Abwandlung 2: Zinssatz 5% p. a.

Abwandlung 3: Zinssatz 3% p. a.

Abwandlung 4: Zinssatz 1% p. a.

Aufgabe 4

Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2018 nach der Zinszahlung € 30 000,—.

- Der Kontoinhaber zahlt von 2019 fünf Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 5 000,— auf sein Konto ein. Danach entnimmt er seinem Konto fünf Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 5 000,—. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der zehn Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 5% p. a. aus!
- Welcher Betrag ergibt sich — unter sonst gleichen Bedingungen —, wenn zuerst die Auszahlungen und dann die Einzahlungen jeweils am Beginn eines Jahres vorgenommen werden?

Hinweis » Denke an Zins- und Zahlungs-
Perioden, nicht in Jahren.

K_m, K_0, p, q, m, b, ZW

8. Familie Debeuk hat sich entschlossen, eine zusätzliche Versicherung abzuschließen. Der Vertrag besagt, dass an jedem Quartalsende € 100,- an die Versicherung gezahlt werden müssen. Über welchen Betrag könnte Familie Debeuk nach zwölf Jahren verfügen, wenn sie die Prämie alternativ, d. h. jeweils am Quartalsende, zu einem Quartalszins von 1% angelegt hätte?

geg.: $p = 1$ $q = 1,01$ $b = 100$

$m = 48$ (12 Jahre \rightarrow 4 Perioden)

anfangsbeitrag: $K_0 = 0$

ges.: K_{48}

Lös.: $K_m = K_0 \cdot q^m + b \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$

$K_m = 0 \cdot 1,01^{48} + 100 \cdot \frac{1,01^{48} - 1}{1,01 - 1}$

$= \underline{\underline{6.127,26}}$

Sol...

thomas.rothow@hotmail.de

11

12. Auf einem Sparkonto befanden sich am 31.12.2018 € 20 000,-. Folgende Beträge wurden bzw. werden nachschüssig eingezahlt: 2019 bis einschließlich 2025 wurden bzw. werden jeweils am Jahresende € 5 000,- eingezahlt. Ab 2026 wird jährlich eine nachschüssige Rente ausgezahlt: 2026 bis einschließlich 2030 werden jeweils € 7 000,- entnommen. Wie groß ist das Sparguthaben nach der letzten Ratenzahlung bei einem Zinssatz von 7% p. a.?

90% 1/2, 1/3 $r = 0,07$ $q = 1,07$

Phase der Einzahlungen

geg.: $K_0 = 20000$ $n = 7$ $R_2 = 5000$

$r = 7$ $q = 1,07$ $zW: \text{nachschüssig}$

ges.: K_m

lis.: $K_m = K_0 q^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$K_m = 20000 \cdot 1,07^7 + 5000 \cdot \frac{1,07^7 - 1}{1,07 - 1}$$

$$= \underline{\underline{75.385,73}}$$

$$20000 \times 1,07^7 + 5000 \cdot ((1,07^7 - 1) : (1,07 - 1)) =$$

Phase der Auszahlung

$$K_0 = 75.385,73 \quad m = 5$$

$$K = -7000$$

$$P = 7 \quad q = 1,07 \quad \text{Zw. mehrstufig}$$

ges: K_m

$$\text{dis: } K_m = K_0 q^m + K \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$$K_m = 75.385,73 \cdot 1,07^5 -$$

$$7000 \cdot \frac{1,07^5 - 1}{1,07 - 1} = \underline{\underline{65.477,21}}$$

Sort...

Projekt-Aufgabe 3

Abwandlungen 2 zu Aufgabe 11

Abwandlung 1: Zinssatz 9% p. a. ✓

Abwandlung 2: Zinssatz 5% p. a.

Abwandlung 3: Zinssatz 3% p. a.

Abwandlung 4: Zinssatz 1% p. a.

Abwandlung 5: Zinssatz 0,5% ✓

9%

Einzahlungsreihe

$$K_m = 20000 \cdot 1,09^7 + 5000 \cdot \frac{1,09^7 - 1}{1,09 - 1}$$

$$= \underline{\underline{82.562,96}}$$

$$K_m = 82.562,96 \cdot 1,09^5 - 7000 \cdot \frac{1,09^5 - 1}{1,09 - 1}$$

$$= \underline{\underline{85.140,37}} \quad \text{Soll...}$$

Siehe Notizen von Ob 12.

Projekt-Aufgabe 2

Abwandlungen 1 zu Aufgabe 11

Abwandlung 1: Alle Zahlungen erfolgen vorschüssig

Abwandlung 2: Einzahlungen erfolgen vorschüssig,
Auszahlungen erfolgen nachschüssig

Abwandlung 3: Einzahlungen erfolgen nachschüssig (7 Jahre),
danach 6 Jahre ohne Zahlungen (reine Verzinsung),
Auszahlungen erfolgen vorschüssig (5 Jahre)

7%

H17

1% HA

Hieman.rschow@fokmail.de

$K_n, K_0, (p, q), n, r, zW$

10. Es ist der Betrag zu bestimmen, den ein Unternehmen am Ende einer jeden Zinsperiode in einen Fond einzahlen muss, um nach Ablauf von acht Jahren Ausrüstungen im Wert von € 40 000,- ersetzen zu können. Der Restwert der Anlagen wird vernachlässigt und der Halbjahreszinssatz beträgt 4%.

Abwandlung 1: Welcher Betrag ergibt sich bei vorschüssiger Zahlungsweise?

Abwandlung 2: Es sind bereits € 11 555,- vorhanden. Welcher vorschüssige Betrag ergibt sich nun?

Etwas Sprachliches

Betrag z

Restwert

andere Begriffe & Ziele

• Liquidationswert. Erlös für eine Maschine bei Ausgliederung aus dem Unternehmen

• Rückfluss

Ansatz. $n = 16$ (8 Jahre $\hat{=}$ 2 Perioden)

geg: $T = 4$ $q = 1,04$ $K_n = 40000$

n oder $n_0 = 0$, $K_0 = 0$

Ans: 2

$$\text{Ans.: } h = \frac{K_n - K_0 q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}} = (i)$$

$$h = \frac{40000 - 0.1,04^{16}}{1,04^{16} - 1}$$

$$= \underline{\underline{1.832,80}}$$

Sch..

$$(40000 - 0.1,04 \times^{16}) :$$

$$((1,04 \times^{16} - 1) : (1,04 - 1)) =$$

Auszahlung 1 $\underline{\underline{Z = 1762,31}}$

Auszahlung 2 f_{y} : wie der

$K_0 = 11.555$ Konstant

$$Z = \frac{K_m - K_0 q^3}{q \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}}$$

$$Z = \frac{40000 - 11555 \cdot 1,04^{16}}{1,04 \cdot \frac{1,04^{16} - 1}{1,04 - 1}}$$

$$= \underline{\underline{808,80}}$$

Soll...

$$K_n, K_0, (p, q), n, k, zW$$

9. Ein Maurer, der von einem Gerüst gestürzt ist, soll zu Beginn eines jeden Jahres eine Rente in Höhe von € 2 400,- erhalten. Welche einmalige Abfindung hat seine Baufirma jetzt zu leisten, wenn man annimmt, dass die Rente zwanzigmal ausgezahlt wird und der Zinssatz 5,5% p. a. beträgt?

$$\text{geg.: } k = 2400 \quad p = 5 \quad q = 1,055$$

$$n = 20 \quad \text{vorläufig} \quad K_{20} = 0$$

$$\text{ges.: } K_0 \text{ (gek.)}$$

Welder gefürigte Betrag K_0 finanziert eine zwanzigmalige vorläufige Rente in Höhe von € 2.400,-?

$$\text{Lös.: } K_0 = \frac{K_n - kq \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$$

$$K_0 = \frac{0 - 2400 \cdot 1,055}{1,055 - 1} \cdot \frac{1,055^{20} - 1}{1,055 - 1}$$

$$= (-) \underline{\underline{30.258,37}}$$

① Der Mannes erhält
sofort mal einmahl's

€ 30.258,37.

② € 30.258,37 finan =
wobei eine Lösung ist

anzahl von Zinsen

Zahlung im Jahre 05,

€ 2,400,-

Zweiter Satz

z. s. K_{20}

z. s. $K_{10} = 30 \quad 258,37$

$n = 20 \quad p = 5,5 \quad q = 1,055$

Barwert

$B = -2400$

Wiss.: $K_m = K_0 q^n + K_1 q \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Platz für Notizen

$$K_{20} = 30.258,37 \cdot 1,055^{20} -$$

$$2400 \cdot 1,055 \frac{1,055^{20} - 1}{1,055 - 1}$$

$$= 4,5 \cdot 10^{-3} = 0,0045$$

$$4,5 \cdot 10^{-3} = \frac{4,5}{10^3} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{45}{1000} = 0,0045$$

Nach 10 Jahre ist das Konto

vollständig gesamt!

wie es sein soll.

alle 10 Jahre



eine schöne
Woge

