

Formelsammlung Mathematik

1. Quadratische Gleichung

1.1 $x^2 + px + q = 0$ ($p - q$ -Formel)

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.2 $ax^2 + bx + c = 0$ (allgemeine Lösungsformel)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Finanzmathematik

2.1 Leibniz Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 q^n$$

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

$$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln q}$$

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) * 100$$

2.2 Allgemeiner Fall mit Startkapital K_0 und laufender Zahlung k :

2.2.1 nachschüssige Zahlungsweise

$$K_n = K_0 \cdot q^n + k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = \frac{K_n - k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$$

$$k = \frac{K_n - K_0 \cdot q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_n + \frac{k}{q - 1}}{K_0 + \frac{k}{q - 1}} \right)}{\ln q}$$

2.2.2 vorschüssige Zahlungsweise

$$K_n = K_0 \cdot q^n + k \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = \frac{K_n - k \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$$

$$k = \frac{K_n - K_0 \cdot q^n}{q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_n + \frac{k \cdot q}{q - 1}}{K_0 + \frac{k \cdot q}{q - 1}} \right)}{\ln q}$$

2.3 Annuität (A):

$$A = K_0 \frac{q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Tilgungsbetrag bei konstanter Annuität: $T_{n^*} = T_1 q^{n^* - 1}$

2.4 Ewige Rente

2.4.1 Ewige nachschüssige Rente:

$$K_0 = \frac{k}{q - 1}$$

2.4.2 Ewige vorschüssige Rente:

$$K_0 = \frac{k \cdot q}{q - 1}$$

2.5 Unterjährige Einzahlungen k^* und jährliche Verzinsung p

Umrechnungsformeln in einen einmaligen nachschüssigen Betrag

k_{nach} bzw. k_{vor} :

2.5.1 Nachschüssige Einzahlung der Beträge k^* :

$$k_{nach} = k^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right) \quad \text{und danach } K_n = k_{nach} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2.5.2 Vorschüssige Einzahlung der Beträge k^* :

$$k_{vor} = k^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right) \quad \text{und danach } K_n = k_{vor} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2.6 Durchschnittlicher Zinsfuß: $p_D = \left(\sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n} - 1 \right) \cdot 100$

5. Differenzialrechnung

5.1 Grunddifferenziale

$$5.1.1 \quad y = x^n \quad y' = nx^{n-1}$$

$$5.1.2 \quad y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$5.1.3 \quad y = e^x \quad y' = e^x$$

$$5.1.4 \quad y = a^x \quad y' = a^x \cdot \ln a$$

$$5.1.5 \quad y = \sin x \quad y' = \cos x$$

$$5.1.6 \quad y = \cos x \quad y' = -\sin x$$

$$5.1.7 \quad y = \tan x \quad y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

5.2 Spezielle Differentiationsregeln

5.2.1 Konstanter-Faktor-Regel

$$y = a \cdot f(x) \quad y' = a \cdot f'(x)$$

5.2.2 Summenregel

$$y = f(x) \pm g(x) \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

5.2.3 Produktregel

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5.2.4 Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

5.2.5 Kettenregel

$$y = f[g(x)] \quad y' = \frac{df[g(x)]}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

äußere innere
Ableitung Ableitung

6. Elastizitäten

Durchschnittselastizität mit y als abhängiger und x als unabhängiger Variable:

$$\bar{\epsilon}_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Elastizitätsfunktion mit y als abhängiger und x als unabhängiger Variable:

$$\epsilon_{y,x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Elastizitätsfunktion der Nachfrage in Bezug auf den Preis

$$\epsilon_{x_N, p} = \frac{dx_N}{dp} \cdot \frac{p}{x_N} = x'_N \cdot \frac{p}{x_N}$$

7. Kurvendiskussion für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

	$y = f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$...	$f^{(2n-1)}(x)$	$f^{(2n)}(x)$	$f^{(2n+1)}(x)$
Steigung	Kurve steigt	> 0							
	Kurve fällt	< 0							
Krümmung	konkave Krümmung		< 0						
	konvexe Krümmung		> 0						
Maximum	Maximum (Standard)	0	< 0						
	Maximum (allgemein)	0	0	0	0	...	0	< 0	
Minimum	Minimum (Standard)	0	> 0						
	Minimum (allgemein)	0	0	0	0	...	0	> 0	
Wendepunkt	Wendepkt. (Standard)	$\neq 0$	0	$\neq 0$					
	Wendepkt. (allgemein)	$\neq 0$	0	0	0	...	0	0	$\neq 0$
Sattelpunkt	Sattelpunkt (Standard)	0	0	$\neq 0$					
	Sattelpunkt (allgemein)	0	0	0	0	...	0	0	$\neq 0$

Die Darstellung ist angelehnt an::

Der Große Rechenruden, hrsg. von der Fachredaktion des Bibliographischen Instituts; Mannheim/ Wien/ Zürich, 1969, S. 488.

Bemerkungen:

- a) $2n$ ist eine gerade Zahl
- b) $2n - 1$ bzw. $2n + 1$ sind ungerade Zahlen

11. Logarithmengesetze

$$11.1 \quad \log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad 11.2 \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$11.3 \quad \log(a^n) = n \cdot \log a \quad 11.4 \quad \log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log a$$

12. Potenz- und Wurzelgesetze

Definitionen

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, wobei a n -mal mit sich selbst multipliziert wird

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Rechenregeln für Potenzen

$$12.2.1 \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad 12.2.2 \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad a \neq 0$$

$$12.2.3 \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad 12.2.4 \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad b \neq 0$$

$$12.2.5 \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad 12.2.6 \quad a^0 = 1; \quad a \neq 0$$

Rechenregeln für Wurzeln

$$12.3.1 \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad 12.3.2 \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$12.3.3 \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad 12.3.4 \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$12.3.5 \quad \sqrt[r \cdot n]{a^{r \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$