Wirtschafts-
mathematik

Mathematik I

Verfasser:
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

VWA ***Verwaltungs- und Wirtschafts-
Akademie Potsdam e. V.***

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Anmerkungen zu Folgen und Reihen

- **Definition einer Folge**

  Ordnet man jeder natürlichen Zahl k eine Zahl a_k zu, so bildet die Aneinanderreihung dieser a_k eine (endliche) Zahlenfolge. Wir schreiben sie als $\left[a_k\right]$.
  Die a_k heißen Glieder der Folge, k heißt Index des Folgengliedes a_k.

- **Arten von Folgen**

  a) Arithmetische Folgen:

  Arithmetische Folgen (erster Ordnung) sind Zahlenfolgen, bei denen die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

  Allgemeines Glied

  $$a_{n+1} - a_n = d = konst., \text{ für alle } n \varepsilon \ N$$

  Bildungsgesetz zur Berechnung des n-ten Gliedes:

  $$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

  b) Geometrische Folgen:

  Geometrische Folgen sind Zahlenfolgen, bei denen der Quotient q zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

  Allgemeines Glied

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = konst., \text{ für alle } n \varepsilon \ N$$

  Bildungsgesetz zur Berechnung des n-ten Gliedes:

  $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

c) Alternierende Folgen:

Alternierende Folgen sind Zahlenfolgen, die von Glied zu Glied das Vorzeichen wechseln.

d) <u>Die</u> harmonische Folge

Die Folge $\left[a_k\right]$ mit $a_k = \frac{1}{k}$ heißt die harmonische Folge. Im Gegensatz zu den anderen Arten von Folgen gibt es also nur <u>eine</u> harmonische Folge.

- **<u>Eigenschaften von Folgen</u>**

a) beschränkte und unbeschränkte Folgen:

Eine Zahlenfolge $\left[a_k\right]$ heißt nach unten **(nach oben)** beschränkt, wenn für alle Folgenglieder gilt: $a_k \geq c = const$. **($a_k \leq c = const.$)**

c heißt untere **(obere)** Schranke.

Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt beschränkt.

b) monotone, streng-monotone und nicht monotone Folgen:

Gilt für $\left[a_k\right]$: $a_k < a_{k+1}$ für alle $k \varepsilon\ N$, so heißt die Folge streng monoton wachsend.

Gilt für $\left[a_k\right]$: $a_k > a_{k+1}$ für alle $k \varepsilon\ N$, so heißt die Folge streng monoton fallend.

Ist zwischen zwei aufeinander folgenden Folgegliedern daneben auch die Gleichheit zugelassen, so entfällt jeweils das Wort "streng".

Eine Folge, die keine dieser Bedingungen erfüllt, ist nicht-monoton.

c) Häufungspunkt(e) einer Folge:

Gibt es für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder der Folge $\left[a_k\right]$ mit a_k aus dem Intervall $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, so heißt a Häufungspunkt der Folge.

d) Grenzwert einer Folge:

Gibt es für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Glieder der Folge $\left[a_k\right]$ mit a_k **<u>nicht</u>** aus dem Intervall $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, so heißt a Grenzwert der Folge.

e) Schlussfolgerung aus c) und d):

Der Grenzwert einer Folge ist also stets auch ihr Häufungspunkt, ein Häufungspunkt einer Folge muss jedoch nicht ihr Grenzwert sein.

D. h.: Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert, kann aber mehrere Häufungspunkte aufweisen.

- **<u>Definition einer Reihe:</u>**

Werden die ersten n Glieder einer Zahlenfolge $[a_k]$ summiert, so heißt

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die n-te Teilsumme (Partialsumme).

- **<u>Arten von Reihen:</u>**

a) Arithmetische Reihen:

Werden die Glieder einer arithmetischen Folge (fortlaufend vom ersten Glied an) summiert, so erhält man eine arithmetische Summe.

Zu bilden ist also die Summe

$$s_n = a_1 + (a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2 \cdot d) + (a_1 + 3 \cdot d) + \ldots + (a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Als Bildungsgesetz über die ersten n Glieder ergibt sich:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left(2a_1 + (n-1) \cdot d\right)$$

Ausgangspunkt / Erklärung /Beweis (dieser Formel) ist der Gauß-Trick:

Zu bilden ist die Summe der ersten hundert natürlichen Zahlen:

$$\begin{array}{rl} s_{100} = & 1 + \ \ 2 + \ \ 3 + \ \ 4 + \ldots \ + \ 99 + 100 \\ + \quad s_{100} = & 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots \ + \ \ 2 + \ \ 1 \\ \hline 2s_{100} = & 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots \ + 101 + 101 \\ & (die \ 101 \ steht \ jetzt \ genau \ 100 mal \ da) \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad 2s_{100} = 100 \cdot 101$$

$$s_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$$

b) Geometrische Reihen:

Werden die Glieder einer geometrischen Folge (fortlaufend vom ersten Glied an) summiert, so erhält man eine geometrische Summe.

Zu bilden ist also die Summe über:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Als Bildungsgesetz über die ersten n Glieder ergibt sich:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Um zum Bildungsgesetz zu gelangen, muss

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$$

mit q multipliziert werden. Dann muss der neu entstandene Ausdruck vom vorstehenden abgezogen werden. Das ist zwar beeindruckend, aber von der Optik her weniger „berauschend“. Deshalb wird auf eine optische Präsentation verzichtet.

Dass $a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad und \quad a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ tatsächlich gleich sind, obwohl es zunächst nicht so aussieht, wird deutlich, wenn einer der Ausdrücke mit (-1) erweitert wird.

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Aufgaben zu Folgen und Summen

1. Für eine arithmetische Folge gelte: $a_{15} = 37$ und $a_{20} = 117$.
   Bestimmen Sie: a_1, d, a_{10} und s_{10}.

2. Für eine geometrische Folge gelte: $a_3 = 64$ und $a_5 = 40{,}96$.
   Bestimmen Sie: a_1, q, a_4 und s_4.

3. Zehn Zahlen bilden eine arithmetische Folge mit der Summe 255. Die fünfte Zahl ist die 23. Bitte geben Sie diese zehn Folgenglieder an!

4. Gegeben seien die ersten Glieder einer geometrischen Folge mit: 5, 10, 20, 40, 80, ...
   Bestimmen Sie die Anzahl der Folgenglieder, die als Summe 5 115 ergibt.

5. Gegeben seien die ersten Glieder einer arithmetischen Folge mit: 5, 10, 15, 20, 25, ...
   Bestimmen Sie die Anzahl der Folgenglieder, die als Summe 1 050 ergibt.

6. Eine Folge hat das allgemeine Glied $a_k = 2k + 3$.
   Bestimmen Sie bitte die ersten fünf Glieder, das zwanzigste Glied und die Summe der ersten zwanzig Glieder der Folge!

7. Eine Folge sei gegeben durch ihre Rekursionsformel (rekursive Darstellung) $a_{k+1} = a_k + 3$ mit $a_1 = 4$.
   Bestimmen Sie bitte die ersten fünf Glieder, das dreißigste Glied und die Summe der ersten zehn Glieder der Folge! Wie lautet das allgemeine Glied (Bildungsgesetz)?

8. Eine Folge hat das allgemeine Glied $a_k = 384 * \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   Bestimmen Sie bitte die ersten fünf Glieder, das zehnte Glied und die Summe der ersten sechs Glieder der Folge!

9. Eine Folge sei gegeben durch ihre Rekursionsformel (rekursive Darstellung) $a_{k+1} = 2a_k$ mit $a_1 = 3$. Bestimmen Sie bitte die ersten fünf Glieder, das siebente Glied und die Summe der ersten zehn Glieder der Folge! Wie lautet das allgemeine Glied (Bildungsgesetz)?

10. Finden Sie je eine Folge (Angabe des Bildungsgesetzes oder rekursive Darstellung), für die folgendes gilt:

    a) geometrische, nicht monotone und beschränkte Folge
    b) konvergente, monotone und beschränkte Folge
    c) alternierende Nullfolge, keine geometrische Folge
    d) Folge mit zwei Häufungspunkten.

11. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:

    a) Jede konstante Folge ist sowohl eine arithmetische als auch eine geometrische Folge.
    b) Jede rekursive Folge ist auch eine arithmetische Folge.
    c) Eine Folge kann 0, 1, 2, 3 oder mehr Häufungspunkte haben.
    d) Hat eine Folge einen Häufungspunkt, so ist dieser auch ihr Grenzwert.
    e) Hat eine Folge einen Grenzwert, so ist dieser auch ihr Häufungspunkt.
    f) Der Grenzwert einer geometrischen Folge existiert immer.
    g) Jede geometrische Folge ist monoton.
    h) Jede arithmetische Folge ist monoton.

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- **<u>Übersicht über die verwendete Notation</u>**

K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung $(k > 0)$, laufende Auszahlung $(k < 0)$
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

Wird ein Kapital über mehrere Zinsperioden (Jahre) hinweg angelegt und werden dabei die jeweils am Jahresende fälligen Zinsen angesammelt und somit in den nachfolgenden Jahren mitverzinst, entstehen Zinseszinsen.

- **<u>Standardfall der Zinseszinsrechnung:</u>**

  Grundlegende Annahmen:

  Zinsen werden jährlich berechnet.
  Zinsen werden dem Kapital am Ende der Zinsperiode zugeschlagen.
  Verzinsungsdauer ist ein ganzzahliges Vielfaches der Zinsperioden

- **<u>Barwert:</u>**

  Der Barwert eines Kapitals ist der Wert, den das Kapital K_0 haben muss, um bei Anlage mit Zinseszins nach n Perioden den Betrag K_n zu erreichen.

Es ist vielfach üblich, die Zinszahlungen nicht jährlich, sondern in kürzeren, gleichlangen Zeit-abschnitten (halbjährlich, vierteljährlich, monatlich usw.) zu vereinbaren.

- **<u>Unterjährige Verzinsung:</u>**

  Werden für ein Jahr m Zinsperioden vereinbart, dann entsprechen einer Verzinsungsdauer von n Jahren $m\,n$ Zinsperioden.

  Bei nominellem Zinsfuß von p ist der unterjährige Zinsfuß $\frac{p}{m}$.

  Der bei unterjähriger Verzinsung mit dem Zinsfuß $\frac{p}{m}$ auftretende (Kapital-)Endwert ist größer als der bei jährlicher Verzinsung entstehende Endwert. Die Begründung liegt darin, dass bei unterjähriger Verzinsung die Zinsen wieder mitverzinst werden (Zinseszinseffekt). Auf ein Jahr bezogen, ergibt sich damit auch ein höherer **Effektivzinssatz** als der nominal ausgewiesene.

- **Effektivzins:**

  Der effektive Jahreszins p_{eff} ist derjenige Zinssatz, der bei jährlicher Verzinsung denselben Zinsbetrag ergibt wie die m-malige Verzinsung zum Zinsfuß $\frac{p}{m}$.

  Der effektive Jahreszins ist deshalb immer auf ein Jahr bezogen.

  Als Effektivzins ergibt sich: $p_{eff} = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p/m}{100} \right)^m - 1 \right]$

Setzt man den bei der unterjährigen Verzinsung beschriebenen Prozess immer weiter fort, d. h. vereinbart man für ein Jahr immer mehr Zinsperioden, so gelangt man schließlich zur **stetigen Verzinsung**. Es fragt sich, ob man durch eine beliebige Erhöhung der Anzahl der Zinsperioden - bei entsprechender Verkleinerung des Zinsfußes - den (Kapital-)Endwert über alle Grenzen steigern kann.

- **Stetige Verzinsung:**

Es gilt: $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{p}{m} = 0$

Betrachtet man nun den Grenzwert des Endwertes:

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{m*100}\right)^{m*n} \\ &= \lim_{m\to\infty} K_0 \left((1 + \frac{p}{m*100})^m \right)^n \\ &= K_0 \lim_{m\to\infty} \left((1 + \frac{p}{m*100})^m \right)^n \end{aligned}$$

und da gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

ergibt sich für $K_n = K_0 * e^{\frac{n*p}{100}}$.

Das heißt: Der Endwert wächst nicht über alle Grenzen.

- **Rente:**

Unter einer Rente versteht man eine Folge von fest vereinbarten Zahlungen in Höhe von k, die zu bestimmten Zeitpunkten (i. d. R. am Anfang oder am Ende eines Jahres, Monats etc.) geleistet werden. Unterschieden werden die nachschüssige und die vorschüssige Zahlungsweise.

Nachschüssige Rente: Die Zahlungen erfolgen am Ende einer Zinsperiode, die nachschüssige Rente ist nicht zinsrelevant:

(1) **Einzahlungen** werden nicht verzinst. (Haben Sie eine inhaltliche Erklärung?)

(2) **Auszahlungen** führen nicht zu einer Reduktion der Zinserträge. (Haben Sie dafür eine Erklärung?)

(3) **Formelinstrumentarium**

$$K_n = K_0 \cdot q^n + k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = \frac{K_n - k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$$

$$k = \frac{K_n - K_0 \cdot q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_n + \frac{k}{q-1}}{K_0 + \frac{k}{q-1}} \right)}{\ln \; q}$$

Eine allgemeine Auflösung nach p bzw. q ist nicht möglich.

vorschüssige Rente: Die Zahlungen erfolgen am Beginn einer Zinsperiode, die vorschüssige Rente ist zinsrelevant:

(1) Einzahlungen werden verzinst. (Haben Sie eine inhaltliche Erklärung?)

(2) Auszahlungen führen zu einer Reduktion der Zinserträge. (Haben Sie eine inhaltliche Erklärung?)

(3) Formelinstrumentarium

$$K_n = K_0 \cdot q^n + k \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = \frac{K_n - k \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q^n}$$

$$k = \frac{K_n - K_0 \cdot q^n}{q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_n + \frac{k \cdot q}{q - 1}}{K_0 + \frac{k \cdot q}{q - 1}} \right)}{\ln \; q}$$

Eine allgemeine Auflösung nach p bzw. q ist nicht möglich.

Ein praktisch sehr relevanter Fall ist der, dass Rentenzahlungen monatlich, vierteljährlich oder halbjährlich erfolgen, aber eine jährliche Verzinsung zugrunde gelegt wird. Hier fallen also Einzahlungs- bzw. Auszahlungsperiode auf der einen Seite und Zinsperiode auf der anderen Seite auseinander. Hier ist es zweckmäßig, die m unterjährigen – vorschüssigen bzw. nachschüssigen – Rentenzahlungen in Höhe von k^* auf einen entsprechenden (konformen) einmaligen nachschüssig einzuzahlenden (!) Rentenbetrag k zurückzuführen. Diese nachschüssige Zahlungsweise wird *unabhängig* von der tatsächlich vorliegenden Zahlungsmodalität (vorschüssig bzw. nachschüssig) gewählt. Diese nachschüssige Betrachtungsweise erhält insbesondere dann Beachtung, wenn eine mehrjährige Betrachtung vorliegt.

Bei nachschüssiger Zahlungsweise ergibt sich:

$$k_{nach} = k^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

Bei vorschüssiger Zahlungsweise ergibt sich:

$$k_{vor} = k^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

Nochmals:
Es ist zu beachten, dass unabhängig davon, ob die unterjährigen Zahlungen vorschüssig oder nachschüssig erfolgen, die Beträge k_{nach} *bzw.* k_{vor} immer erst am Jahresende anfallen, so dass bei ihrer Verwendung stets die Formeln für die nachschüssige Zahlungsweise anzusetzen sind, wenn eine mehrjährige Betrachtung vorliegt.

Falls nun das Kapital nach n Jahren zu berechnen ist, muss stets die Formel für den Endwert einer nachschüssigen Rente verwendet werden. Da es kein Anfangskapital gibt, sei die Formel gleich verkürzt angegeben:

$$K_n = k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Musteraufgabe...

a) Eine vorschüssige alle 3 Monate erfolgende Rente beträgt € 5.555,—. Die jährliche Verzinsung ist mit 5,5% p. a. festgesetzt. Die Rentendauer ist 25 Jahre. Über welchen Betrag können Sie nach Ablauf der 25 Jahre verfügen?

b) Welcher Betrag ergibt sich bei nachschüssiger Rentenzahlung und sonst gleichen Bedingungen?

Lösung a)

$$k_{vor} = k^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

$$k_{vor} = 5555 \cdot \left(4 + \frac{4+1}{2} \cdot \frac{5,5}{100} \right) = 22.983,81$$

Hochrechnung auf 25 Jahre...

$$K_n = k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{25} = 22.983,81 \cdot \frac{1,055^{25} - 1}{1,055 - 1} = 1.175.681,36$$

Schlusssatz...

Lösung b)

$$k_{vor} = k^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100} \right)$$

$$k_{vor} = 5555 \cdot \left(4 + \frac{4-1}{2} \cdot \frac{5{,}5}{100} \right) = 22.678{,}29$$

Hochrechnung auf 25 Jahre...

$$K_n = k \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_{25} = 22.678{,}29 \cdot \frac{1{,}055^{25} - 1}{1{,}055 - 1} = 1.160.053{,}22$$

Schlusssatz...

Eine weitere oftmals vorkommende Fragestellung ist die nach dem durchschnittlichen Zinsfuß:

Der Durchschnittszinssatz wird mit Hilfe des geometrischen Mittels bestimmt. Gegeben sei ein Zeitraum von n Jahren. In den ersten n_1 Jahren gelte ein Zinssatz von p_1 und damit ein Aufzinsungsfaktor von q_1. In den folgenden n_2 Jahren gelte ein Zinssatz von p_2 und damit ein Aufzinsungsfaktor von q_2. In den folgenden n_3 Jahren gelte ein Zinssatz von p_3 und damit ein Aufzinsungsfaktor von q_3. In den folgenden n_4 Jahren gelte ein Zinssatz von p_4 und damit ein Aufzinsungsfaktor von q_4. Es gelte also: $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Der Durchschnittszinssatz bestimmt sich dann wie folgt, mit q_d als durchschnittlicher Aufzinsungsfaktor und p_d als durchschnittlicher Zinssatz.

$$q_d = \sqrt[n]{q_1^{n_1} * q_2^{n_2} * q_3^{n_3} * q_4^{n_4}}$$

$$p_d = (q_d - 1) * 100$$

Beispiel:

Ein in seiner Höhe nicht näher spezifiziertes Kapital werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit jeweils 7%, im sechsten bis zehnten Jahr mit jeweils 10% und im elften bis fünfzehnten Jahr mit 12% verzinst. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Zinssatz für den angegebenen Zeitraum!

$$
\begin{array}{lll}
p_1 = 5 & q_1 = 1{,}05 & n_1 = 1 \\
p_2 = 7 & q_2 = 1{,}07 & n_2 = 4 \\
p_3 = 10 & q_3 = 1{,}10 & n_3 = 5 \\
p_4 = 12 & q_4 = 1{,}12 & n_4 = 5
\end{array}
$$

Und damit ergibt sich:

$$q_d = \sqrt[15]{1{,}05^1 * 1{,}07^4 * 1{,}1^5 * 1{,}12^5} = 1{,}0951$$

$$p_d = (1{,}0951 - 1) * 100 = 9{,}51$$

Der Durchschnittszinssatz beträgt also 9,51%.

- **<u>Mehrperiodische (dynamische) Investitionsrechnung</u>**

Die Investitionsrechnung stellt Modelle, Methoden und Verfahren zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit von Investitionen bereit. Durch Vergleich der in den Jahren seiner Nutzung verursachten Kosten, Aufwendungen und Erträge soll festgestellt werden,

- erstens ob sich die Investition in dieses Gut überhaupt lohnt, d. h. ob der Fall der Nicht-Investition in dieses Gut für das Unternehmen nicht günstiger wäre
- und zweitens, falls mehrere Investitionsmöglichkeiten bestehen, welches der lohnenden Investitionsobjekte für das Unternehmen das günstigste ist.

Die traditionellen Verfahren der Investitionsrechnung werden differenziert in statische und dynamische (finanzmathematische) Verfahren. Die statischen Verfahren (Kostenvergleichsrechnung, Gewinnvergleichsrechnung, Rentabilitätsrechnung und Amortisations(vergleichs)-rechnung) berücksichtigen den zeitlichen Faktor entweder überhaupt nicht oder nur unvollkommen. Die statischen Verfahren beziehen sich in der Regel nur auf eine (idealisierte) Periode. Bei den statischen Verfahren sind also alle Jahre als gleich betrachtet. Auf die statischen Verfahren soll im Weiteren nicht eingegangen werden, nichtsdestotrotz werden sie im Unterricht ausführlich behandelt und sind höchst klausurrelevant.

Den dynamischen, finanzmathematischen Methoden ist gemeinsam, dass sie die Vorteilhaftigkeit einer Investition für die gesamte Lebensdauer des Investitionsobjektes untersuchen. Grundlage bilden der Zufluss bzw. der Abfluss von Zahlungsmitteln. Die Auszahlungen setzen sich zusammen aus den Anschaffungsauszahlungen für das Investitionsobjekt und die laufenden fixen Auszahlungen für die Aufrechterhaltung der Betriebsbereitschaft und proportionalen Auszahlungen für den Einsatz von Material, Arbeitsleistungen u. a.. Die Einzahlungen stammen in erster Linie aus dem Absatz der mit dem Investitionsobjekt produzierten Leistungen.

Nachfolgend sollen

- die Kapitalwertmethode
- die Methode der internen Zinsfüße
- die Annuitätenmethode

vorgestellt werden. (Die Darstellung orientiert sich an: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 81 ff.)

- **Kapitalwertmethode**

Die Kapitalwertmethode ist ein mehrperiodisches Verfahren der Investitionsrechnung, das auf dem Prinzip der Barwertrechnung basiert. Alle mit einer Investition verbundenen zukünftigen Einnahmen und Ausgaben werden einander gegenübergestellt und, da sie zu unterschiedlichen Zeiten anfallen, mittels eines vorher festgelegten Kalkulationszinsfußes auf den gegenwärtigen Zeitpunkt (d. h. Zeitpunkt. Null) abgezinst. Wie bei der Entscheidungsrechnung ist der Grund wieder die Vergleichbarmachung der zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallenden Zahlungen.

In der Regel entstehen Ausgaben ab dem Zeitpunkt 0, Einnahmen hingegen erst in späteren Perioden.

Übersicht über die verwendete Notation:

E_k	:	erwartete Einnahmen zum Zeitpunkt k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
A_k	:	erwartete Ausgaben zum Zeitpunkt k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
C_k	:	erwartete Einnahmenüberschüsse zum Zeitpunkt k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
K_E	:	Kapitalwert der Einnahmen, d. h. Summe der Barwerte aller Einnahmen
K_A	:	Kapitalwert der Ausgaben, d. h. Summe der Barwerte aller Ausgaben
C	:	Kapitalwert der Investition, d. h. Kapitalwert der Einnahmeüberschüsse, d. h. Summe der Barwerte der Einnahmeüberschüsse
p	:	Kalkulationszinsfuß
$\frac{1}{q}$	:	Abzinsungsfaktor

Mit diesen Beziehungen gilt für den Kapitalwert einer Investition:

$$C=\sum_{k=0}^{n} C_k * \frac{1}{q^k}=\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k}=$$

$$C_0+C_1*\frac{1}{q}+C_2*\frac{1}{q^2}+\ldots+C_n*\frac{1}{q^n}=$$

$$C_0+\frac{C_1}{q}+\frac{C_2}{q^2}+\ldots+\frac{C_n}{q^n}$$

Ist $C>0$, ist die Investition vorteilhafter als eine Anlage zum Kalkulationszinsfuß p, die Investition lohnt. Ist $C=0$, erbringt die Investition eine Verzinsung in Höhe von p und ist finanzmathematisch betrachtet genauso gut wie die Alternativanlage zum Kalkulationszinssatz p. Ist $C<0$, ist die Anlage zum Kalkulationszinssatz p günstiger als die Investition, die Investition lohnt also nicht. Stehen mehrere Investitionsalternativen zur Disposition, so wird dasjenige Investitionsobjekt ausgewählt, welches den höchsten Kapitalwert besitzt vorausgesetzt sein Kapitalwert ist nicht kleiner als Null.

- **<u>Methode der internen Zinsfüße</u>**

Anders als die Kapitalwertmethode geht die Methode der internen Zinsfüße nicht von einer gegebenen Mindestverzinsung in Form des Kalkulationszinsfußes. Die Methode der internen Zinsfüße fragt vielmehr danach, bei welchem Kalkulationszinsfuß der Kapitalwert des Investitionsgutes gerade zu Null wird, beim dem also die Summe der Barwerte der Einnahmen und Ausgeben gleich groß sind, d. h. beim dem die Summe der Barwerte der Einnahmeüberschüsse gerade Null ist (interne Zinsfuß i).

$$0=\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(E_k-A_k\right)}{q^k}=\left(E_0-A_0\right)+\frac{\left(E_1-A_1\right)}{q}+\frac{\left(E_2-A_2\right)}{q^2}+\ldots+\frac{\left(E_n-A_n\right)}{q^n}$$

Mathematisch gesehen entsteht also das Problem der Nullstellenbestimmung einer Gleichung $n-ten$ Grades. Sofern, was der Regelfall sein dürfte, $n>2$ ist, d. h. das Investitionsobjekt mehr als zwei Perioden genutzt wird, ist die Berechnung des internen Zinsfußes i. d. R. nur näherungsweise möglich.

Dieser interne Zinsfuß liefert allein aber kein Kriterium für die Vorteilhaftigkeit eines Investitionsobjektes, vielmehr muss ein (marktüblicher) Kalkulationszinsfuß p als Vergleichs-maßstab herangezogen wird, welcher die gewünschte Mindestverzinsung widerspiegelt. Der Vergleich kann ergeben, dass

- $i > p$, d. h. der interne Zinsfuß ist größer als die gewünschte Mindestverzinsung, mithin ist das Investitionsobjekt vorteilhaft;

- $i = p$, d. h. der interne Zinsfuß und die gewünschte Mindestverzinsung entsprechen Einander
- $i < p$, d. h. der interne Zinsfuß ist kleiner als die gewünschte Mindestverzinsung, mithin lohnt es nicht, die Investition durchzuführen.

Stehen mehrere Investitionsalternativen zur Disposition, so ist diejenige mit dem größten internen Zinsfuß am vorteilhaftesten. Ob die Investition allerdings durchgeführt wird, hängt davon ab, ob die gewünschte Mindestverzinsung realisiert wird oder nicht.

- **<u>Annuitätenmethode</u>**

In der Annuitätenmethode werden die durchschnittlichen jährlichen Einnahmen (so genannte Einnahmenannuität EA) den durchschnittlichen jährlichen Ausgaben (so genannte Ausgaben-annuität AA) gegenüber gestellt. Die mit einer Investition verbundenen zukünftigen Einnahmen und Ausgaben werden in jährlich gleichbleibende Werte transformiert.

Dazu wird der Annuitäten- bzw. Wiedergewinnungsfaktor (AF) verwendet:

$$AF = \frac{q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Vergleichen Sie mit der Annuitätenformel bei der Tilgung!
Der Rechnung wird ein Kalkulationszinsfuß, ähnlich der Kapitalwertmethode, zugrunde gelegt.
Eine Investition

- ist vorteilhaft, falls: $EA > AA$
- entspricht einer Anlage zum Kapitalmarktzins, falls: $EA = AA$
- ist nicht vorteilhaft, falls: $EA < AA$

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Aufgaben zur Finanzmathematik

1. Herr Debeuk legte am 01.01.2020 € 800,— mit einem Zinssatz von 5% p. a. an. Über welchen Betrag kann er Ende 2024 verfügen?

2. Herr Debeuk überlegt, welchen Betrag er heute anlegen muss, um nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 6% p. a. € 2 000,— ausgezahlt zu bekommen?

3. Herr Debeuk bringt € 800.- zur Bank und erhält eine Verzinsung von 8% p. a.. Wie lange muss er das Geld anlegen, um mindestens € 1 100,— zu besitzen?

4. Paul hat vor sechs Jahren € 500.- zur Bank gebracht. Heute hat er bei Zinseszinsen € 597,— auf seinem Konto. Wie hoch ist der Zinsfuß p?

5. Ein Kapital von € 1 000,— ist bei 6%iger Verzinsung p. a. in einem Jahr auf € 1 060,— angewachsen, d. h. es gilt ein nomineller Zinssatz von 6% p. a.. Berechnen Sie jeweils den Endwert des Kapitals und Effektivverzinsung bei

   a) einer halbjährlichen Verzinsung zu 3%
   b) einer vierteljährlichen Verzinsung zu 1,5%
   c) einer monatlichen Verzinsung zu 0,5%!

6. Berechnen Sie den Endwert eines Kapitals von € 1 000,— nach fünf Jahren bei einem nominellen Zinssatz von 4% p. a.. Gehen Sie bei Ihrer Rechnung davon aus, dass die Zinsen vierteljährlich berechnet werden und ermitteln Sie am Ende Ihrer Rechnung den effektiven Zinssatz!

7. In welcher Zeit hat sich ein Kapital von € 1 000.- bei einem nominellen Zinssatz von 5% verdoppelt, wenn

   a) der Fall jährlicher Verzinsung
   b) der Fall stetiger Verzinsung

   vorliegt?

8. Familie Debeuk hat sich entschlossen, eine zusätzliche Versicherung abzuschließen. Der Vertrag besagt, dass an jedem Quartalsende € 100,— an die Versicherung gezahlt werden müssen. Über welchen Betrag könnte Familie Debeuk nach zwölf Jahren verfügen, wenn sie die Prämie alternativ, d. h. jeweils am Quartalsende, zu einem Quartalszins von 1% angelegt hätte?

9. Ein Maurer, der von einem Gerüst gestürzt ist, soll zu Beginn eines jeden Jahres eine Rente in Höhe von € 2 400,— erhalten. Welche einmalige Abfindung hat seine Baufirma jetzt zu leisten, wenn man annimmt, dass die Rente zwanzigmal ausgezahlt wird und der Zinssatz 5,5% p. a. beträgt?

10. Es ist der Betrag zu bestimmen, den ein Unternehmen am Ende einer jeden Zinsperiode in einen Fond einzahlen muss, um nach Ablauf von acht Jahren Ausrüstungen im Wert von € 40 000,— ersetzen zu können. Der Restwert der Anlagen wird vernachlässigt und der Halbjahreszinssatz beträgt 4%.

    Abwandlung 1: Welcher Betrag ergibt sich bei vorschüssiger Zahlungsweise?
    Abwandlung 2: Es sind bereits € 11 555,— vorhanden. Welcher vorschüssige Betrag ergibt sich nun?

11. Auf einem Sparkonto befanden sich am 31.12.2018 € 20 000,—. Folgende Beträge wurden bzw. werden nachschüssig eingezahlt: 2019 bis einschließlich 2025 wurden bzw. werden jeweils am Jahresende € 5 000,— eingezahlt. Ab 2026 wird jährlich eine nachschüssige Rente ausgezahlt: 2026 bis einschließlich 2030 werden jeweils € 7 000,— entnommen. Wie groß ist das Sparguthaben nach der letzten Ratenzahlung bei einem Zinssatz von 7% p. a.?

12. € 20 000,— sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.
    a) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
    b) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
    c) Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.

13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,— (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a.. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

14. Eine Anleihe, die nach zehn Jahren zu einem Kurs von 100% zurückgezahlt wird, wird mit einem Nominalzins von 5% p. a. emittiert. Welcher Emissionskurs wird sich bei einem allgemeinen Zinsniveau von 6% einstellen? Zeigen Sie, dass beide Anlageformen zum selben Ergebnis führen, wenn Sie

    a) € 926,40
    b) € 1 000,—

    für zehn Jahre anlegen können!

15. Ferdinand Müller ist von seiner Firmenleitung mitgeteilt worden, dass seine Firma zum 31.12. ihren Betrieb einstellen muss. Der vom Betriebsrat ausgehandelte Sozialplan sieht für Herrn Müller, der zurzeit € 60 000,— jährlich verdient, folgende drei Möglichkeiten vor:

    a) bis zu seinem Renteneintritt in zwölf Jahren jährlich zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,—
    b) zehn Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 35 000,—
    c) fünf Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres € 30 000,— und zu Beginn des sechsten Jahres eine einmalige Abfindung in Höhe von € 170 000,—.

    Welcher Vorschlag ist für Herrn Müller der günstigste, wenn ein marktüblicher Zins von 5% p.a. unterstellt wird?

16. Ein Golfclub möchte ein neues Vereinshaus bauen, an dessen Finanzierung sich die Clubmitglieder beteiligen sollen. Der Vereinsvorstand schlägt deshalb folgende Finanzierungsmodelle vor:

Vorschlag 1:
die Mitglieder zahlen elf Jahre lang, jeweils am Anfang eines Jahres, € 1 800,— an den Verein

Vorschlag 2:
die Mitglieder zahlen vierzehn Jahre lang, jeweils am Ende eines Jahres, € 1 650,— an den Verein.

a) Welche Alternative ist für die Clubmitglieder günstiger, wenn ein Zinssatz von 6,5% p. a. unterstellt wird und man annimmt, dass die Clubmitglieder möglichst wenig an ihren Verein zahlen möchten?

b) Welchen Betrag müssten die Clubmitglieder jährlich zahlen, damit die schlechtere Alternative genauso gut wäre wie die bessere (bei gleichem Zinssatz)?

17. Sie möchten eine Eigentumswohnung verkaufen und erhalten zwei Angebote:

Angebot A: € 20 000,— sofort, € 20 000,— nach zwei Jahren und € 10 000,— nach fünf Jahren

Angebot B: € 16 000,— sofort, € 25 000,— nach drei Jahren und € 10 000,— nach vier Jahren.

Welches Angebot ist günstiger, wenn der marktübliche Zinssatz

a) 3% p.a.
b) 5% p.a.

beträgt? Erklären Sie das erhaltene Ergebnis!

18. (Gewinnvergleichsrechnung)

Ein Investor besitzt einen Planungszeitraum von T=5 Jahren. und steht vor der Wahl zwischen zwei Investitionen A und B. Die Anlagen A und B können das gleiche Produkt in der gleichen Qualität herstellen. Unterschiede bestehen lediglich hinsichtlich der Produktionsgeschwindigkeit, der Anschaffungskosten und der Betriebskosten. Aufgrund von Marktbeobachtungen rechnet der Investor mit einem maximalen Absatz von 100 000 Stück je Jahr und einem Preis von € 10,— für das Produkt. Weiter stehen dem Investor folgende Informationen über die Investitionen A und B zur Verfügung:

Investition	**A**	**B**
Anschaffungspreis	€ 500 000,—	€ 600 000,—
erwartete Nutzungsdauer	5 Jahre	4 Jahre
Produktionsmenge je Jahr	60 000 Stück	80 000 Stück
beschäftigungsvariable Kosten je Stück	€ 6,—	€ 5,—
beschäftigungsfixe Kosten (ohne Abschreibungen und Zinsen)	€ 70 000,—	€ 170 000,—

Die Anlagen A und B sollen linear abgeschrieben werden und der Kalkulationszinsfuß auf das durchschnittlich gebundene Kapital beträgt 10%! Prüfen Sie mithilfe der Gewinnvergleichsrechnung, welche der beiden Investitionen für den Investor günstiger ist!

19. (Rentabilitätsvergleichsrechnung)
Gegeben sei der Datensatz unter der Gewinnvergleichsrechnung aus Aufgabe 18). Prüfen Sie mithilfe der Rentabilitätsvergleichsrechnung, welche der beiden Investitionen für den Investor günstiger ist!

20. (Kostenvergleichsrechnung)
Sie haben die Wahl ein Produkt für € 6,— extern einzukaufen oder eine Maschine zu erwerben, mit Anschaffungskosten von € 200 000,—, variablen Kosten von € 3,— pro Stück, einer Nutzungsdauer von fünf Jahren und sonstigen fixen Kosten (außer Zinsen und Abschreibungen) von € 10 000,—. Sie rechnen mit einem Kalkulationszinsfuß von 10%. Ab welcher Produktionsmenge lohnt die Anschaffung der Maschine? Warum? Stellen Sie Ihre Entscheidung auch graphisch dar!

21. (Kapitalwertmethode)

Gegeben seien die geschätzten Einnahmen und Ausgaben eines Investitionsobjektes im Zeitablauf:

Zeitpunkt k:	0	1	2	3	4	5
Einnahmen E_k:	0	150 000	180 000	210 000	190 000	170 000
Ausgaben A_k:	435 000	45 000	60 000	80 000	70 000	65 000

a) Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!
b) Ist das Investitionsobjekt als vorteilhaft einzuschätzen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem Kalkulationszinsfuß von 8% aus. (Das Beispiel entstammt: HETTICH / JÜTTLER/ LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 84.)

22. (Methode der internen Zinsfüße)

Gegeben seien die geschätzten Einnahmen und Ausgaben eines Investitionsobjektes im Zeitablauf:

Zeitpunkt k:	0	1	2
Einnahmen E_k:	0	48 000	56 000
Ausgaben A_k:	48 200	23 000	26 000

a) Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!
b) Ist das Investitionsobjekt als vorteilhaft einzuschätzen, wenn Sie sich einen Kalkulationszinsfuß von 8% vorgegeben haben? (Das Beispiel entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 85.)

23. (Annuitätenmethode)

Eine Investition führt zu jährlichen Einnahmen von € 30 000.- und erfordert jährliche Ausgaben von € 10 000,—. Ist die Investition vorteilhaft, einmalige Anschaffungsausgaben in Höhe von € 150 000,— anfallen, die Nutzungsdauer zwölf Jahre beträgt und eine Verzinsung von 7,5% p. a. verlangt wird? (Das Beispiel entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 86.)

Projektaufgaben

Aufgabe 1) **Unterschiedliche Zinssätze**

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,— wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst.

a) Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?
b) Am Ende des vierten Jahres benötigen Sie € 27 962,94. Wie hoch muss dann Ihr Guthaben Ende der zweiten Periode mindestens sein?
c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß!

Aufgabe 2) **Vollständige Finanzpläne**

Um einen älteren Manager anwerben zu können, ist ein Unternehmen auf eine Pensionszulage eingegangen. Der betreffende Manager wurde zum 01.01.2019 eingestellt und soll ab 01.01.2023 eine Pensionszahlung von € 10 000,— pro Jahr zu Beginn des Jahres für die nächsten fünf Jahre ausgezahlt bekommen. Legen Sie im Folgenden einen Zinssatz von 6% p. a. zugrunde.

a) Welcher Betrag muss für den vorliegenden Rentenfall zurückgestellt werden, d. h. Ende 2022 zur Verfügung stehen?
b) Berechnen Sie die Zuführungen zu den Pensionsrückstellungen pro Periode (nachschüssige und konstante Einzahlungen am Jahresende)!
c) Stellen Sie den vollständigen Finanzplan auf, der den gesamten Vorgang beschreibt!

Aufgabe 3) **Nochmals vollständiger Finanzplan - unterschiedlicher Soll- und Habenzins**

Sie haben einen Planungshorizont von vier Jahren und verfolgen das Ziel der Endvermögensmaximierung, d. h. je höher Ihr Kapitalbestand am Ende ist, umso besser. Unabhängig davon, ob eine Investition durchgeführt wird oder nicht, fallen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmte Basiszahlungen an. Sofort und danach werden Entnahmen gewünscht, die mit € 70,— beginnen und dann ansteigen. Die Zahlungen sollen sich in den einzelnen Jahren wie 1,0 : 1,2 : 1,3 : 1,5 : 1,6 verhalten. Der Kapitalmarkt ist unvollkommen, wobei die Zinssätze, welche für Geldanlagen bzw. Kredite zwischen den Zeitpunkten t und t+1 erwartet werden, aus nachstehender Tabelle ergeben. Ihnen wird Kredit höchstens in Höhe von € 750,— gewährt.

Zeitpunkt	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Basiszahlungen	500	130	− 140	150	300
Investition A	−1 000	650	280	200	− 30
Investition B	− 950	0	0	560	795
Habenzins	7%	6%	5%	5%	
Sollzins	11%	10%	10%	10%	

Treffen Sie Ihre Entscheidung mithilfe vollständiger Finanzpläne! Berücksichtigen Sie auch die Möglichkeit, dass Sie nicht investieren!

Aufgabe 4) **Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)**

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6 000,— , dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

a) für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
b) für den Fall konstanter Annuitäten.

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,— zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b)

c) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine
   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,— sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Aufgabe 7) **Gemischte Verzinsung**

Am 25. Juni 2018 wurden € 1.000,-- zu einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 12. April 2033?

Aufgabe 8) **Gemischte Verzinsung**

Am 24. Juli 2020 wurden € 3.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 18.April 2035 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 2020 berücksichtigt?
   Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:
2. Wie viele Tage werden für das Jahr 2035 berücksichtigt?
   Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:
3. Der Auszahlungsbetrag beträgt: **Bitte wählen Sie eine Antwort, kennzeichnen Sie am besten durch ein kleines x oder ein großes X.**

   - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.158,67.
   - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.160,36.
   - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.159,52
   - Keiner der angegeben Werte stimmt (Rundungsdifferenzen bis zu € 0,10 sind unerheblich.).

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 1
Abwandlung zu Aufgabe 8
Welcher Betrag ergibt sich, wenn die Zahlungen vorschüssig erfolgen?

Aufgabe 2
Abwandlungen 1 zu Aufgabe 11
Abwandlung 1: Alle Zahlungen erfolgen vorschüssig
Abwandlung 2: Einzahlungen erfolgen vorschüssig,
Auszahlungen erfolgen nachschüssig
Abwandlung 3: Einzahlungen erfolgen nachschüssig (7 Jahre),
danach 6 Jahre ohne Zahlungen (reine Verzinsung),
Auszahlungen erfolgen vorschüssig (5 Jahre)

Aufgabe 3
Abwandlungen 2 zu Aufgabe 11
Abwandlung 1: Zinssatz 9% p. a.
Abwandlung 2: Zinssatz 5% p. a.
Abwandlung 3: Zinssatz 3% p. a.
Abwandlung 4: Zinssatz 1% p. a.

Aufgabe 4
Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2018 nach der Zinszahlung € 30 000,—.

a) Der Kontoinhaber zahlt von 2019 fünf Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 5 000,— auf sein Konto ein. Danach entnimmt er seinem Konto fünf Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 5 000,—. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der zehn Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 5% p. a. aus!

b) Welcher Betrag ergibt sich — unter sonst gleichen Bedingungen —, wenn zuerst die Auszahlungen und dann die Einzahlungen jeweils am Beginn eines Jahres vorgenommen werden?

Aufgabe 5
Tilgung zu konstanten Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

Aufgabe 6
Ein Kapital in Höhe von € 10.000,-- werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit 7,75%, im sechsten bis zehnten Jahr mit 10% und im elften bis 17. Jahr mit 12% verzinst.

1. Berechnen Sie K_{17}!
2. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 1.!
3. Ende des 15. Jahres benötigen Sie € 80.000.--. Wie noch muss dann Ihr Kapital Ende des vierten Jahres mindestens sein?
4. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 3.!

Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

Aufgabe 8
Welches Angebot ist bei 7% Zinseszins das höchste:

Angebot 1: sofort einmalig € 10.000,—
Angebot 2: zu Ende des vierten Jahres einmalig € 13.000,—
Angebot 3: acht Jahre lang nachschüssig € 1.700,—
Angebot 4: eine ewige nachschüssige Rente i. H. v. € 685,—
Angebot 5: eine ewige Rente, die am Ende des ersten Jahres mit € 495,— beginnt und dann um 2% p. a. ansteigt?

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Zusammenfassende Aufgaben – Mathematik

Aufgabe 1
Ein in seiner Höhe nicht näher spezifiziertes Kapital werde im ersten und zweiten Jahr mit 5%, im dritten bis sechsten Jahr mit jeweils 8%, im siebenten bis neunten Jahr mit jeweils 9% und im zehnten bis fünfzehnten Jahr mit 12% verzinst. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Zinssatz für den angegebenen Zeitraum (15 Jahre)!

Aufgabe 2
Sie möchten in sechs Jahren eine Weltreise im Wert von € 50 000,— unternehmen.

a) Welchen Betrag müssen Sie jährlich zurücklegen, wenn Sie die Einzahlungen am Ende jeden Jahres vornehmen?
b) Welcher vorschüssige Betrag ergibt sich, wenn sich bereits € 25.000,— auf Ihrem Konto befinden?

Legen Sie Ihren Berechnungen einen Zinssatz von 6% p.a. zugrunde

Aufgabe 3

a) Eine vorschüssige alle 2 Monate erfolgende Rente beträgt € 2.000,—. Die jährliche Verzinsung ist mit 6,5% p. a. festgesetzt. Die Rentendauer ist 10 Jahre. Über welchen Betrag können Sie nach Ablauf der 10 Jahre verfügen?
b) Welcher Betrag ergibt sich bei nachschüssiger Rentenzahlung und sonst gleichen Bedingungen?

Aufgabe 4

1. Ein Selbstständiger will sich zum 01.01.2023 mit € 1 800 000,—, die zu 8,5% p. a. Zinseszins angelegt sind, zur Ruhe setzen. Welche gleichbleibende nachschüssige Rate kann er anschließend jährlich davon 25 Jahre lang abheben (wenn das Konto nach Ablauf der 25 Jahre vollkommen geräumt sein soll)?
2. Ein Selbstständiger will sich zum 01.01.2023 mit € 1 800 000,—, die zu 8,5% p. a. Zinseszins angelegt sind, zur Ruhe setzen. Über welchen Betrag verfügt der Selbstständige am 01.01.2019, wenn er ab 2009 jährlich nachschüssig € 100 000,— abgehoben hat?

Aufgabe 5

a) Auf welchen Betrag ist ein Kapital in Höhe von € 5.000,— angewachsen, wenn im ersten Jahr 4,5%, im zweiten bis fünften Jahr 6%, im sechsten bis achten Jahr 10% und im neunten bis zwölften Jahr 12% jährliche Zinsen gewährt werden?
b) Welchen Betrag muss ein Kapital Ende des dritten Jahres mindestens haben, wenn unter oben gegebenen Bedingungen Ende des neunten Jahres € 25.000,— benötigt werden?

Aufgabe 6

1. Paul bringt heute € 10.000, — zu 3,5% p. a. zur Bank. Wie groß ist sein Kapital nach 8 Jahren?
2. Wie lange dauert es, bis sich € 8.888, — bei einem Zinssatz von 3,25% p. a. vervierfachen?
3. Carl leiht sich € 2.500, — und soll nach fünf Jahren unter Berücksichtigung von Zinseszinsen € 3.500, — zurückzahlen. Wie hoch ist der Zinsfuß?

Aufgabe 7

Sie haben einen Kredit in Höhe von € 2.250 000,— aufgenommen. Der Kredit ist in 25 Jahren bei einem Zinssatz von 11% p. a. unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten zu tilgen!

1. Berechnen Sie den Wert der konstanten Annuität!
2. Welchen Tilgungsbetrag leisten Sie im 18. Jahr?
3. Welchen Zinsbetrag leisten Sie im 15. Jahr?

Aufgabe 8

Sie einen Kredit in Höhe von € 500 000,— aufgenommen. Der Kredit ist in vier Jahren bei einem Zinssatz von 6,5% p. a. zu tilgen!

1. Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan auf, aus dem für jedes Jahr **die Tilgungszahlung, die Zinszahlung, die Restschuld und die Annuität** hervorgehen.
2. Was ist unter Annuität! zu verstehen? Formulieren Sie bitte einen vollständigen Satz!
3. Nennen Sie einen möglichen Vor- und einen möglichen Nachteil der Tilgung zu konstanten Tilgungsbeträgen sowie der Tilgung zu konstanten Annuitäten!

Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung für die Tilgung zu konstanten Tilgungsbeträgen!
Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung für die Tilgung zu konstanten Annuitäten!
Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung als endfälliges Darlehen!

Aufgabe 9
Teil 1

1. Eine nachschüssige alle 4 Monate erfolgende Rente beträgt € 7 500—. Die jährliche Verzinsung ist mit 3,75% p. a. festgesetzt. Die Rentendauer ist 25 Jahre. Über welchen Betrag können Sie nach Ablauf der 25 Jahre verfügen?
2. Welcher Betrag ergibt sich bei gleicher Laufzeit und gleichem Zinsfuß, wenn die Zahlungen in Höhe von € 7 500—. vorschüssig und monatlich geleistet werden?

Teil 2

1. Auf welchen Betrag ist ein Kapital in Höhe von € 8.600,— angewachsen, wenn die Bank zunächst 5 Jahre lang 6%, danach 4 Jahre lang 8% und schließlich 8 Jahre lang 4% Zinseszinsen gewährt?
2. Welchen Betrag muss ein Kapital Ende des vierten Jahres mindestens haben, wenn unter oben gegebenen Bedingungen Ende des zwölften Jahres € 22.000,— benötigt werden?

Aufgabe 10
Ein Investor hat zwischen den Anlagen A und B zu wählen und besitzt einen Planungszeitraum von T=5 Jahren. Mit beiden Maschinen kann man das gleiche Produkt in der gleichen Qualität herstellen. Laut Auskunft der Marktforschungsabteilung lässt sich das Produkt zu einem Preis von € 20,— verkaufen, die Absatzhöchstmenge liegt bei 65 000 Stück je Jahr.

Investition	**A**	**B**
Anschaffungspreis	€ 1.000.000,—	€ 1.800.000,—
erwartete Nutzungsdauer	5 Jahre	4 Jahre
Beschäftigungsvariable Kosten je Stück	€ 11,75	€ 8,—
Beschäftigungsfixe Kosten (ohne Abschreibungen und Zinsen)	€ 70.000,—	€ 120.000,—
Produktionsmenge je Jahr	50.000 Stück	65.000 Stück

Die Anlagen A und B sollen linear abgeschrieben werden und der Kalkulationszinsfuß auf das durchschnittlich gebundene Kapital beträgt 15%!

Prüfen Sie mithilfe der Gewinnvergleichsrechnung, welche der beiden Anlagen für den Investor günstiger ist! Geben Sie zu Beginn Ihrer Rechnungen das Entscheidungskriterium der Gewinnvergleichsrechnung an!

Aufgabe 11
Gegeben seien die Zahlungsreihen von zwei Investitionen, die die Einnahmeüberschüsse wiedergeben:

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Investition A	-150	60	60	40	30
Investition B	-100	20	30	30	50

1) Wie lautet das Entscheidungskriterium der Kapitalwertmethode!
2) Beurteilen Sie mit Hilfe der Kapitalwertmethode, welche Investition vorteilhafter ist. Legen Sie für die einzelnen Jahre 1 bis 4 folgende Kalkulationszinsfüße zugrunde:

Zeitpunkt	1	2	3	4
Kalkulationszinsfuß	6%	8%	10%	11%

Aufgabe 12
Sie einen Kredit in Höhe von € 500 000,— aufgenommen. Der Kredit ist in sieben Jahren bei einem Zinssatz von 6,5% p. a. zu tilgen! Sie ersten drei Jahre sollen tilgungsfrei sein.

1. Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan auf, aus dem für jedes Jahr **die Tilgungszahlung, die Zinszahlung, die Restschuld und die Annuität** hervorgehen.
2. Was ist unter Annuität! zu verstehen? Formulieren Sie bitte einen vollständigen Satz!
3. Nennen Sie einen möglichen Vor- und einen möglichen Nachteil der Tilgung zu konstanten Tilgungsbeträgen sowie der Tilgung zu konstanten Annuitäten!

Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung für die Tilgung zu konstanten Tilgungsbeträgen!
Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung für die Tilgung zu konstanten Annuitäten!
Bearbeiten Sie die Aufgabe als endfälliges Darlehen!

Aufgabe 13

1.. Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2018 (nach der Zinszahlung für 2018) € 7.000,—. Der Kontoinhaber zahlt von 2019 vier Jahre lang am **Ende** eines jeden Jahres € 4.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine **zweite Phase**, in der er das vorhandene Kapital drei Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto fünf Jahre lang am **Beginn** eines jeden Jahres € 3.000,—. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der zwölf Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 2,5% p. a. aus!

2.. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Einzahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!

Aufgabe 14

Ein Investor hat zwischen den Anlagen A und B zu wählen und besitzt einen Planungszeitraum von T=8 Jahren. Mit beiden Maschinen kann man das gleiche Produkt in der gleichen Qualität herstellen. Laut Auskunft der Marktforschungsabteilung lässt sich das Produkt zu einem Preis von € 12,— verkaufen, die Absatzhöchstmenge liegt bei 7.500 Stück je Jahr.

Investition	**A**	**B**
Anschaffungspreis	€ 180.000,—	€ 210.000,—
Liquidationserlös	€ 20.000,—	€ 30.000,—
erwartete Nutzungsdauer	8 Jahre	6 Jahre
Beschäftigungsvariable Kosten je Stück	€ 3,—	€ 2,50
Beschäftigungsfixe Kosten (ohne Abschreibungen und Zinsen)	€ 10.000,—	€ 7.000,—
Produktionsmenge je Jahr	6.400 Stück	7.000 Stück

Die Anlagen A und B sollen linear abgeschrieben werden und der Kalkulationszinsfuß auf das durchschnittlich gebundene Kapital beträgt 15%!

Prüfen Sie mithilfe der Gewinnvergleichsrechnung, welche der beiden Anlagen für den Investor günstiger ist! Geben Sie zu Beginn Ihrer Rechnungen das Entscheidungskriterium der Gewinnvergleichsrechnung an!

Aufgabe 15

Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2018 (nach der Zinszahlung für 2018) € 7.000,—. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2019 vier Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 4.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine **zweite Phase**, in der er das vorhandene Kapital drei Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto fünf Jahre lang am **Ende** eines jeden Jahres € 3.000,—. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der zwölf Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 2,5% p. a. aus!