

## Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

$K_0$ :	Anfangswert, Startwert, Barwert
$K_n$ :	Zeitwert, Endwert
$n$ :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
$p$ :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$ :	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ :	Abzinsungsfaktor
$k$ :	laufende Einzahlung ( $k > 0$ ), laufende Auszahlung ( $k < 0$ )
$m$ :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

# **Tilgungsrechnung**

**Modell:**



## **Arten der Tilgung:**

**Darstellungsinstrument:**

**Vollständiger Tilgungsplan,**

eine Tabelle, aus der für jede Periode die mitgeführte Restschuld sowie die Zins-, die Tilgungs- und die Gesamtzahlung hervorgehen.

<b>Jahr</b>	<b>Restschuld</b>	<b>Zins auf Restschuld</b>	<b>Tilgung</b>	<b>Gesamt- zahlung</b>
1				
2				

**Datenlage:**

## **Aufgaben**

12. € 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.
- Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
  - Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
  - Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.
13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,- (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a.. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

## **Projektaufgaben**

### **Aufgabe 4) Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)**

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6000,- , dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

- für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
- für den Fall konstanter Annuitäten.

## **Zusatzaufgaben Finanzmathematik**

### **Aufgabe 5**

Tilgung zu konstanten Annuitäten

Kreditbetrag: € 10.000.000,-

Laufzeit: 40 Jahre

Zinsfuß: 11% p. a.

- Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres  $T_{32}$  !
- Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres  $Z_{20}$  !
- Restschuld nach 35 Jahren  $K_{35}$  ! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

### **Aufgabe 12**

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

**Erweiterung:** Löse als endfälliges Darlehen



**Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:**

<b>Jahr</b>	<b>Restschuld</b>	<b>Zins auf Restschuld</b>	<b>Tilgung</b>	<b>Gesamtzahlung</b>



### **Aufgabe 12**

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

#### **1. Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen**

**Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:**

<b>Jahr</b>	<b>Restschuld</b>	<b>Zins auf Restschuld</b>	<b>Tilgung</b>	<b>Gesamtzahlung</b>

### **Aufgabe 12**

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

#### **2. Löse bei (konstanten) Annuitäten**

**Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:**

<b>Jahr</b>	<b>Restschuld</b>	<b>Zins auf Restschuld</b>	<b>Tilgung</b>	<b>Gesamt- zahlung Annuität</b>



## **Aufgabe 12**

### **neue Abwandlung**

€ 20 000,- sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in sechs Jahren zu tilgen, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei bleiben sollen.

**Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen...**



**Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:**

<b>Jahr</b>	<b>Restschuld</b>	<b>Zins auf Restschuld</b>	<b>Tilgung</b>	<b>Gesamtzahlung</b>

## Zusatzaufgaben Finanzmathematik

### Aufgabe 5

Tilgung zu konstanten Annuitäten

Kreditbetrag: € 10.000.000,--

Laufzeit: 40 Jahre

Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres  $T_{32}$  !
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres  $Z_{20}$  !
3. Restschuld nach 35 Jahren  $K_{35}$  ! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!











## Rentenrechnung spezial

### Projektaufgaben

#### Aufgabe 5) Ewige Rente

- a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,- zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von  $p = 8\%$  p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?
- b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine
- a) am Anfang
  - b) am Ende

eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,- sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

#### Aufgabe 6) Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung

- a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,- . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
- b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

### Zusatzaufgaben

#### Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,- . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?



## **unterjährige Zahlungen bei jährlicher Verzinsung**

**Datenlage:**



## **Formelinstrumentarium:**

## **Projektaufgaben**

### **Aufgabe 6) Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

- a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,- . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
- b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)



## **Zusatzaufgaben**

### **Aufgabe 7**

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,- . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?



**ewige Rente:**



**Datenlage:**

## **Formelinstrumentarium:**

### Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,- zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von  $p = 8 \% \text{ p. a.}$  zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

a) am Anfang

b) am Ende

eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,- sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von  $4,5\% \text{ p. a.}$



**Platz für Notizen**













