

Skript –  
Finanzwirtschaft  
Teil 5

VWA Potsdam

Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

### Übersicht über die verwendete Notation:

$E_k$  : erwartete Einnahmen zum Zeitpunkt k:  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$A_k$  : erwartete Ausgaben zum Zeitpunkt k:  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$C_k$  : erwartete Einnahmeüberschüsse zum Zeitpunkt k:  $k = 0, 1, 2, \dots, n$   
 auch: **Zahlungsreihe der Investition**

$$C_k = E_k - A_k$$

$C$  : Kapitalwert der Investition

$i$  : Kalkulationszinsfuß

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{q} : \text{Abzinsungsfaktor}$$

Laufzeit; Nutzungsdauer

$C_0$  : Anschaffungskosten

$$C = \sum_{k=0}^n C_k \frac{1}{q^k} = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{q^k} =$$

$$C_0 + C_1 \frac{1}{q} + C_2 \frac{1}{q^2} + \dots + C_n \frac{1}{q^n} =$$

$$C_0 + \frac{C_1}{q} + \frac{C_2}{q^2} + \dots + \frac{C_n}{q^n}$$



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

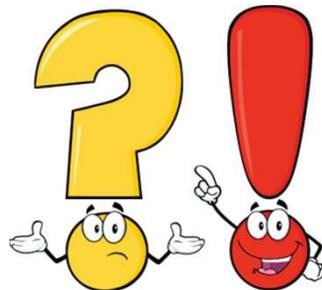
Entscheidungs-  
regel:

**Regel 1: Wähle die Investition mit dem größten positiven internen Zinsfuß!  
(relative Vorteilhaftigkeit!)**

*im Vergleich zu anderen Alternativen*

**Regel 2: Wähle die Investition aber nur dann, wenn ihr interner Zinsfuß  
nicht kleiner ist als die gewünschte Mindestverzinsung (absolute  
Vorteilhaftigkeit!)**

*im Vergleich zu einer Vorgabe*



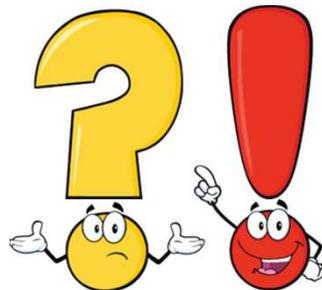
i).

# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

Allgemeines zur  
Methode:

Anders als die Kapitalwertmethode geht die Methode der internen Zinsfüße nicht von einer gegebenen Mindestverzinsung in Form des Kalkulationszinsfußes aus. Die Methode der internen Zinsfüße fragt vielmehr danach, bei welchem Kalkulationszinsfuß der Kapitalwert des Investitionsgutes gerade zu Null wird, beim dem also die Summe der Barwerte der Einnahmen und Ausgaben gleich groß sind, d. h. beim dem die Summe der Barwerte der Einnahmeüberschüsse gerade Null ist (interne Zinsfuß).



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

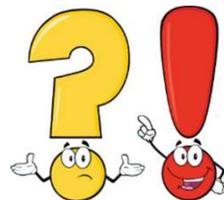
## Methode der internen ZinsfüÙe

$$0 = \sum_{k=0}^n \frac{(E_k - A_k)}{q^k} =$$

$$(E_0 - A_0) + \frac{(E_1 - A_1)}{q} + \frac{(E_2 - A_2)}{q^2} + \dots + \frac{(E_n - A_n)}{q^n}$$

Nutzungsdauer  
Planungsz  
zeit

Mathematisch gesehen entsteht also das Problem der Nullstellenbestimmung eines Polynoms  $n$ -ten Grades. Sofern, was der Regelfall sein dürfte,  $n > 2$  ist, d. h. das Investitionsobjekt mehr als zwei Perioden genutzt wird, ist die Berechnung des internen Zinsfußes i. d. R. nur näherungsweise möglich.



als Ergebnis  
Polynom  $n$ -ten  
Grades

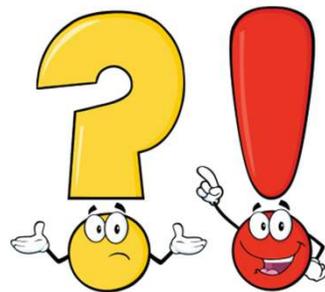


# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

*K - Aufgabe*

Stehen mehrere Investitionsalternativen zur Disposition, so ist diejenige mit dem größten internen Zinsfuß am vorteilhaftesten (**relative Vorteilhaftigkeit**). Ob die Investition allerdings durchgeführt wird, hängt davon ab, ob die gewünschte Mindestverzinsung realisiert wird oder nicht (**absolute Vorteilhaftigkeit**).



*Vorteilhaftigkeits-  
begriffe*



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

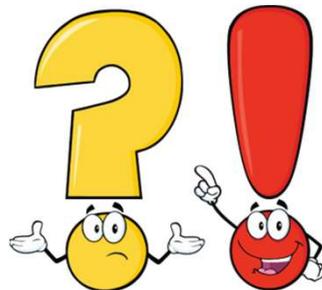
## Methode der internen ZinsfüÙe

### Interpretation des internen Zinsfußes

*sehr unstrukturiert*

- Der interne Zinsfuß kann als Effektivverzinsung des jeweils gebundenen Kapitals aufgefasst werden.
- Die Effektivverzinsung kann als Rendite oder Rentabilität der Investition aufgefasst werden.
- Der interne Zinsfuß kann als kritischer Zinsfuß verstanden werden: Ein zur Finanzierung der Investition darf nicht teurer sein als der interne Zinsfuß.

*^  
aufgenommener Kredit*



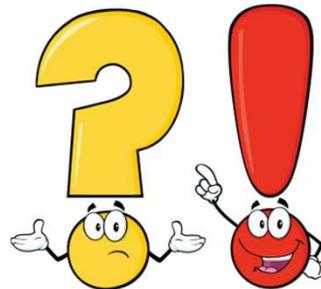
# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

### Interpretation des internen Zinsfußes

- **Relative Vorteilhaftigkeit:** Investition ist besser als Investition A ist besser als Investition B, wenn der interne Zinsfuß von A größer als der interne Zinsfuß von B.
- **Relative Vorteilhaftigkeit:** Investitionen sind vorteilhaft, wenn der interne Zinsfuß größer als die Mindestverzinsung, die gewünschte Verzinsung.

absolute



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

### Kritik der Methode des internen Zinsfußes

- Es ist nicht garantiert, dass eine Investition einen internen Zinsfuß besitzt. Was dann?
- Es kann passieren, dass eine Investition mehrere interne Zinsfüße aufweist. Was dann?
- Dennoch gibt es etliche Praktiker, die dieses Verfahren gern verwenden.

Null stellen für ein Polynom  
man nicht finden  
bestimmen  
^)

1) Zahlungsreihe

$$C = 0 = -1000 + \frac{300}{1.04} + \frac{400}{1.04^2} + \frac{500}{1.04^3}$$

$$0 = -1000q^4 + 3000q^3 + 400q^2 + 500q + 200$$

# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

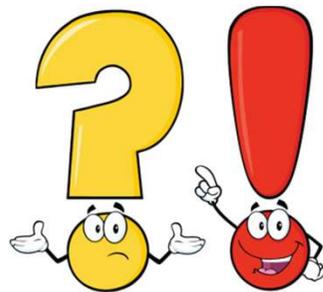
Exkurs: Ein iteratives Verfahren zum Auffinden von Nullstellen und damit von Internen Zinsfüßen: Regula falsi

$$y = f(x) \quad [x_1, x_2]$$

Gegeben sei eine Funktion  $y = f(x)$ , die im Intervall  $[x_1, x_2]$  stetig ist, und es sei

$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  ferner sei ein  $c \in \mathbb{R}^+$  gegeben (Genauigkeitsschranke).

in  $[x_1, x_2]$  muss eine Nullstelle (interner Zinsfuß) liegen



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

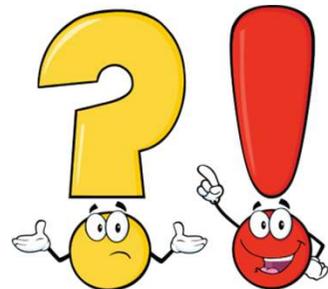
Exkurs: Ein iteratives Verfahren zum Auffinden von Nullstellen: Regula falsi

(1) Bestimme:  $x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$  Gehe zu (2)

(2) Berechne:  $f(x_3)$ .

Falls  $f(x_3) = 0$  liegt bei  $x_3$  eine Nullstelle. Gehe zu (5).

Falls  $f(x_3) \neq 0$  gehe zu (3).



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

Exkurs: Ein iteratives Verfahren zum Auffinden von Nullstellen: Regula falsi

(3) Falls  $|f(x_3)| < c$  ist die Näherung ausreichend. Gehe zu (5).

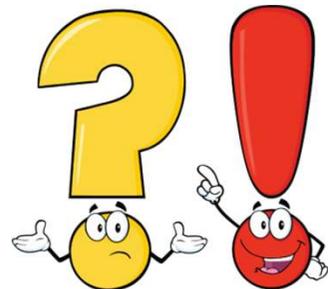
Anderenfalls gehe zu (4).

(4) Bestimme  $f(x_3) \cdot f(x_1)$

Falls  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$  ist, wird  $x_2$  durch  $x_3$  ersetzt. Gehe zu (1).

Falls  $f(x_3) \cdot f(x_1) > 0$  ist, wird  $x_1$  durch  $x_3$  ersetzt. Gehe zu (1).

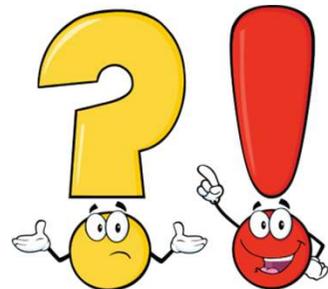
(5) Ende.



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

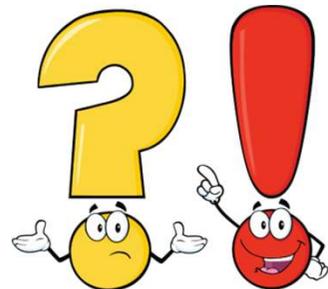
Exkurs: Regula falsi – Ein Beispiel (Notizen 1)



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

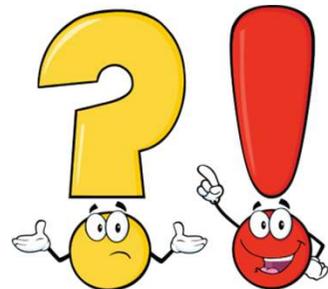
Exkurs: Regula falsi – Ein Beispiel (Notizen 2)



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

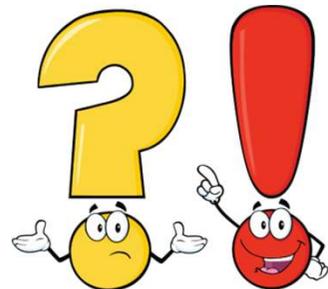
Exkurs: Regula falsi – Ein Beispiel (Notizen 3)



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

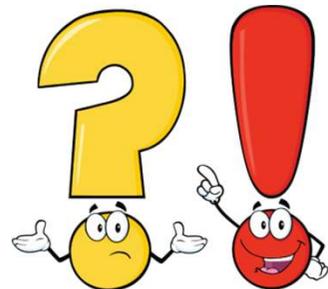
Exkurs: Regula falsi – Ein Beispiel (Notizen 4)



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

Exkurs: Regula falsi – Ein Beispiel (Notizen 5)



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

### Aufgabe 1:

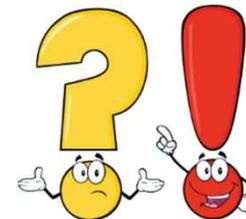
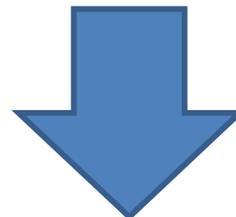
Gegeben seien die geschätzten Einnahmen und Ausgaben eines Investitionsobjektes im Zeitablauf:

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	48.000	56.000
Ausgaben in k	48.200	23.000	26.000

quadratische Gleichung<sup>1)</sup>  
Je winnreicher Mindest-  
verzinsung

1. Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!
2. Ist das Investitionsobjekt als vorteilhaft einzuschätzen, wenn Sie sich einen Kalkulationszinsfuß von 8% vorgegeben haben? Entscheiden Sie mit Hilfe der Methode der internen Zinsfüße! (Das Beispiel entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 85.)

wird  
fortgesetzt



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

### Aufgabe 1:

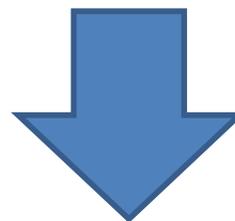
Gegeben seien die geschätzten Einnahmen und Ausgaben eines Investitionsobjektes im Zeitablauf:

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	48.000	56.000
Ausgaben in k	48.200	23.000	26.000

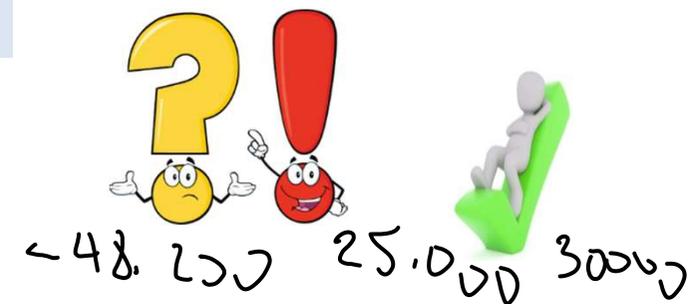
1. Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	150.000	180.000
Ausgaben in k	<del>48.200</del> 48.200	45.000	60.000
Einnahmeüberschuss	-48.200	105.000	120.000

wird  
fortgesetzt



0	1	2
0	48000	56000
48.200	23.000	26.000



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

### Aufgabe 1:

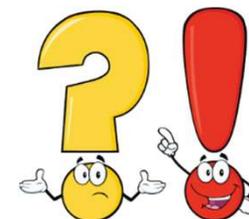
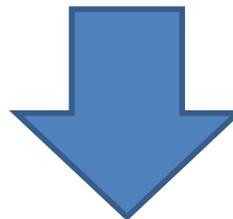
Gegeben seien die geschätzten Einnahmen und Ausgaben eines Investitionsobjektes im Zeitablauf:

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	48.000	56.000
Ausgaben in k	48.200	23.000	26.000

1. Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	150.000	180.000
Ausgaben in k	<del>48.200</del>	45.000	60.000
Einnahmeüberschuss	48		

wird  
fortgesetzt



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

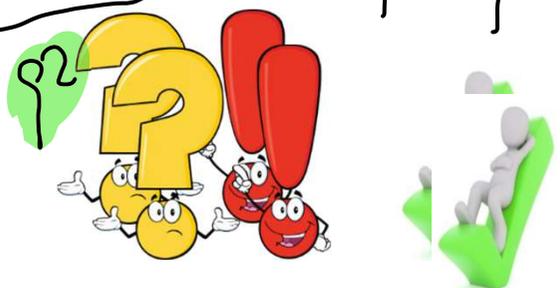
### Aufgabe 1:

1. Berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Einnahmeüberschüsse!

Zeitpunkt k	0	1	2
Einnahmen in k	0	150.000	180.000
Ausgaben in k	<del>435.000</del>	<del>45.000</del>	<del>60.000</del>
Einnahmeüberschuss	-435.000	105.000	120.000

$$C = \sum_{k=0}^2 \frac{C_k}{1+i^k}$$

2. Ist das Investitionsobjekt als vorteilhaft einzuschätzen, wenn Sie sich einen Kalkulationszinsfuß von 8% vorgegeben haben? Entscheiden Sie mit Hilfe der Methode der internen ZinsfüÙe!

$$C = 0 = -\frac{435.000}{1} + \frac{105.000}{1,08} + \frac{120.000}{1,08^2}$$


# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

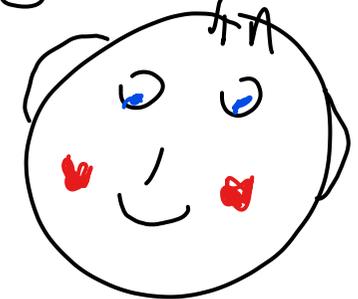
### Aufgabe 1:

Platz für Notizen:

$$0 = -48200 + \frac{25000}{q} + \frac{30000}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$0 = -48200 \cdot q^2 + 25000q + 30000$$

morgen wieder nicht  
Tas!

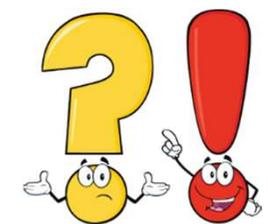


wie geht's?

weiter in der

Ustien

weiter  
19:50 Uhr



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen Zinsfüße

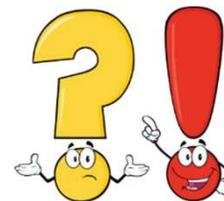
Aufgabe 2:

HA  $C_0 = 0 = \sum \frac{C_t}{1+i^t} = 0 = \frac{C_0}{1+i^0} + \frac{C_1}{1+i^1} + \frac{C_2}{1+i^2}$

Gegeben seien zwei Investitionen A und B. Bestimmen Sie den internen Zinsfuß, der Marktzinsfuß beträgt 10%. Sollten die Investitionen durchgeführt werden? Welche ist die Bessere?

Alternative	Investitionsbetrag	Rückzahlung in t=1	Rückzahlung in t=2
A	10.000	10.900	-
B	10.000	-	13.225

regula falsi  
nicht relevant



quadratische Gleichung

max. 20 Mio.



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

Aufgabe 2:

Platz für Notizen:

$$C = 0$$

Markt zins für 15%

Alternative A

$$-10000 \quad 10900 \quad 0$$

③

$$-10000q = -10900$$

$$q = \frac{-10900}{-10000} =$$

1,09

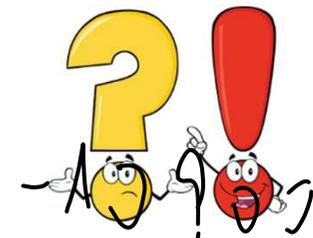
①

$$-10000 + \frac{10900}{q} = 0 / \cdot q$$

= 9%

②

$$-10000q + 10900 = 0$$



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

Aufgabe 2:

Da  $9\% < 10\%$  ist Investition A

Platz für Notizen:

nicht zu nehmen.

Investition B

$$= 10000 \quad 0 \quad 13225$$

$$= 10000 + \frac{0}{f} + \frac{13225}{f^2} = 0$$

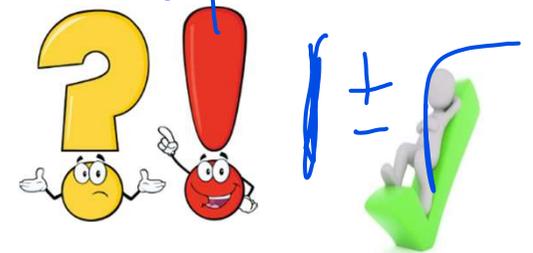
$$= 10000 + \frac{13225}{f^2} = 0 \quad | \cdot f^2$$

$$-10000 f^2 + 13225 = 0 \quad | -13225$$

$$-10000 f^2 = -13225$$

$$f^2 = \frac{-13225}{-10000}$$

$$= 1,3225$$



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

### Aufgabe 2:

Platz für Notizen:

$$q_1 = 1,15$$

$$\Rightarrow 15\%$$

$$q_2 = -1,15 < 0$$

irrelevant

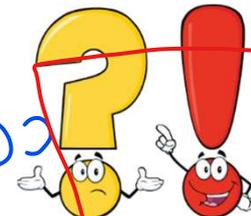
$$15\% \geq 10\%$$

$$q = 1 + \frac{P}{100} \quad | -1$$

$$q - 1 = \frac{P}{100} \quad | \cdot 100$$

Im bes. d. on B ist gut!  
durch führen

$$P = (q - 1) \cdot 100$$



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

### Aufgabe 3

Für eine Investition seien folgende Daten bekannt:

- Anschaffungskosten: € 100.000.—
- Nutzungsdauer: 5 Jahre
- Einnahmeüberschüsse in den Jahren 1 bis 5 in €):  
10.000; 35.000; 30.000; 35.000; 30.000
- Marktzinsfuß: 9,8% ✓
- Der interne Zinsfuß liegt zwischen 8% (Versuchszinssatz 1) und 16% (Versuchszinssatz 2)

*regula falsi*

Ist die Investition vorteilhaft? Entscheiden Sie mit der Methode der internen ZinsfüÙe!

**Hinweis:** Berechnen Sie zunächst die Kapitalwerte bei den beiden Versuchszinssätzen und verwenden danach die Näherungsformel.



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

### Aufgabe 3

$$i_3 = i_1 - \frac{i_2 - i_1}{K_2 - K_1} \times K_1$$

↑ mol

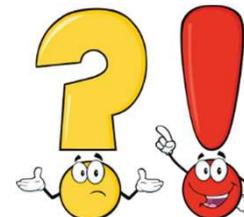
Legende

$i_1$  : Versuchszinssatz 1

$i_2$  : Versuchszinssatz 2

$K_1$  : *Kapitalwert bei Versuchszinssatz 1*

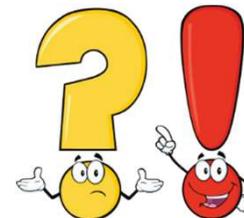
$K_2$  : *Kapitalwert bei Versuchszinssatz 2*



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

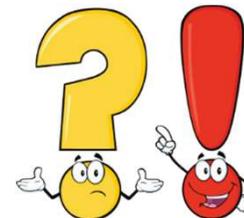
### Aufgabe 3



# Dynamische Investitionsrechenverfahren

## Methode der internen ZinsfüÙe

### Aufgabe 3





... oh, da fehlt doch etwas ...



**und gleich geht es weiter...,**

**einen schönen Abend...**