

## Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

$K_0$  : Anfangswert, Startwert, Barwert

$K_n$  : Zeitwert, Endwert

$n$  : Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)

$p$  : Zinsfuß

$q = 1 + \frac{p}{100}$  : Aufzinsungsfaktor

$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$  : Abzinsungsfaktor

$k$  : laufende Einzahlung ( $k > 0$ ),  
laufende Auszahlung ( $k < 0$ )

$m$  : Anzahl der Perioden innerhalb einer  
Periode

## **Vollständige Finanzpläne**

Ein **Vollständiger Finanzplan** ist ein Instrument der Investitionsrechnung und -planung. Die Grundeigenschaft eines vollständigen Finanzplanes ist seine tabellarische Struktur. Damit schafft ein vollständiger Finanzplan Transparenz, d. h. er ist leicht verständlich und ausbaufähig. Damit ist dieser auch ein Instrument vor dem Hintergrund der zunehmenden Transparenz(an)forderungen im Unternehmensumfeld.

Zunächst werden damit alle Einzahlungen und Auszahlungen einer Periode erfasst, wodurch die Liquidität überwacht werden kann und notfalls Gegensteuerungsmaßnahmen ergriffen werden können.

## **Notation:**







**Formeln:**









## Einstiegsaufgaben

### Aufgabe 1

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,— wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst. Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?



### Aufgabe 2

Familie Debeuk hat sich entschlossen, eine zusätzliche Versicherung abzuschließen. Der Vertrag besagt, dass an jedem Quartalsende € 100,— an die Versicherung gezahlt werden müssen. Über welchen Betrag könnte Familie Debeuk nach zwölf Jahren verfügen, wenn sie die Prämie alternativ, d. h. jeweils am Quartalsende, zu einem Quartalszins von 1% angelegt hätte?

ges.:  $Q = 2400$   $p = 5,5$   $f = 1,055$   
 $n = 20$   $\text{Vandring: } K_{20} = 0$   $\text{ges.: } K_0$

### Aufgabe 3

Ein Maurer, der von einem Gerüst gestürzt ist, soll zu Beginn eines jeden Jahres eine Rente in Höhe von € 2 400,— erhalten. Welche einmalige Abfindung hat seine Baufirma **jetzt** zu leisten, wenn man annimmt, dass die Rente zwanzigmal ausgezahlt wird und der Zinssatz 5,5% p. a. beträgt?

ges.:  $n = 16$  (8 Jahre  $\hat{=}$  2 ZP)  $p = 4$   $f = 1,04$   
 $\text{Vandring: } K_{16} = 40000$   $K_0 = 0$

### Aufgabe 4

Es ist der Betrag zu bestimmen, den ein Unternehmen **am Ende einer jeden Zinsperiode** in einen Fond einzahlen muss, um nach Ablauf von acht Jahren Ausrüstungen im Wert von € 40 000,— ersetzen zu können. Der **Restwert** der Anlagen wird vernachlässigt und der **Halbjahreszinssatz beträgt 4%**.

ges.:  $(p, n), f, ZW, K_n, K_0$   $\text{ges.: } K$  Es geht  
19:45 Uhr weiter

### Aufgabe 5

Auf einem Sparkonto befanden sich am 31.12.2018 € 20 000,—. Folgende Beträge wurden bzw. werden nachschüssig eingezahlt: 2019 bis einschließlich 2025 wurden bzw. werden jeweils am Jahresende € 5 000,— eingezahlt. Ab 2026 wird jährlich eine nachschüssige Rente ausgezahlt: 2026 bis einschließlich 2030 werden jeweils € 7 000,— entnommen. Wie groß ist das Sparguthaben nach der letzten Ratenzahlung bei einem Zinssatz von 7% p. a.?

## Hauptaufgaben

### Aufgabe 1

1. Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2019 (nach der Zinszahlung für 2019) € 16.000, —. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2020 vier Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 4.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine **zweite Phase**, in der er das vorhandene Kapital fünf Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto sechs Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 5.500, —. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der fünfzehn Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 2,5% p. a. aus!
2. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Einzahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!
3. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Auszahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!

### Aufgabe 2

1. Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2014 (nach der Zinszahlung für 2014) € 30.000, —. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2015 vier Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 4.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine zweite Phase, in der er das vorhandene Kapital drei Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto vier Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres € 11.000, —. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der elf Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 1,5% p. a. aus!
2. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Einzahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!
3. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Auszahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!

### Aufgabe 3

Um einen älteren Manager anwerben zu können, ist ein Unternehmen auf eine Pensionszulage eingegangen. Der betreffende Manager wurde zum 01.01.2020 eingestellt und soll ab 01.01.2024 eine Pensionszahlung von € 10 000,— pro Jahr zu Beginn des Jahres für die nächsten fünf Jahre ausgezahlt bekommen. Legen Sie im Folgenden einen Zinssatz von 6% p. a. zugrunde.

1. Welcher Betrag muss für den vorliegenden Rentenfall zurückgestellt werden, d. h. Ende 2023 zur Verfügung stehen?
2. Berechnen Sie die Zuführungen zu den Pensionsrückstellungen pro Periode (nachsüssige und konstante Einzahlungen am Jahresende)!
3. Stellen Sie den vollständigen Finanzplan auf, der den gesamten Vorgang beschreibt!

#### Aufgabe 4

Sie haben einen Planungshorizont von vier Jahren und verfolgen das Ziel der Endvermögensmaximierung, d. h. je höher Ihr Kapitalbestand am Ende ist, umso besser. Unabhängig davon, ob eine Investition durchgeführt wird oder nicht, fallen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmte Basiszahlungen an. Sofort und danach werden Entnahmen gewünscht, die mit € 70,— beginnen und dann ansteigen. Die Zahlungen sollen sich in den einzelnen Jahren wie 1,0 : 1,2 : 1,3 : 1,5 : 1,6 verhalten. Der Kapitalmarkt ist unvollkommen, wobei die Zinssätze, welche für Geldanlagen bzw. Kredite zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t+1$  erwartet werden, aus nachstehender Tabelle ergeben. Ihnen wird Kredit höchstens in Höhe von € 750,— gewährt.

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Basiszahlungen	500	130	-140	150	300
Investition A	-1 000	650	280	200	-30
Investition B	-950	0	0	560	795
Habenzins	7%	6%	5%	5%	
Sollzins	11%	10%	10%	10%	

Treffen Sie Ihre Entscheidung mithilfe vollständiger Finanzpläne! Berücksichtigen Sie auch die Möglichkeit, dass Sie nicht investieren!

#### Aufgabe 5

Sie haben einen Planungshorizont von vier Jahren und verfolgen das Ziel der Endvermögensmaximierung, d. h. je höher Ihr Kapitalbestand am Ende ist, umso besser. Unabhängig davon, ob eine Investition durchgeführt wird oder nicht, fallen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmte Basiszahlungen an. Sofort und danach werden Entnahmen gewünscht, die mit € 60,— beginnen und dann ansteigen. Die Zahlungen sollen sich in den einzelnen Jahren wie 1,0 : 1,1 : 1,2 : 1,4 : 1,6 verhalten. Der Kapitalmarkt ist unvollkommen, wobei die Zinssätze, welche für Geldanlagen bzw. Kredite zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t+1$  erwartet werden, aus nachstehender Tabelle ergeben. Ihnen wird Kredit höchstens in Höhe von € 400,— gewährt.

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Basiszahlungen	500	-200	20	150	300
Investition A	-800	600	200	150	-80
Investition B	-700	300	400	30	100
Investition C	-400	-200	700	0	0
Habenzins	6%	6%	5%	5%	
Sollzins	10%	10%	10%	9%	

Treffen Sie Ihre Entscheidung mithilfe vollständiger Finanzpläne! Berücksichtigen Sie auch die Möglichkeit, dass Sie nicht investieren!

**Aufgabe 1**

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,— wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst. Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?

**Mathematische Lösung:**



### **Aufgabe 5**

Auf einem Sparkonto befanden sich am 31.12.2018 € 20 000,—. Folgende Beträge wurden bzw. werden nachschüssig eingezahlt: 2019 bis einschließlich 2025 wurden bzw. werden jeweils am Jahresende € 5 000,— eingezahlt. Ab 2026 wird jährlich eine nachschüssige Rente ausgezahlt: 2026 bis einschließlich 2030 werden jeweils € 7 000,— entnommen. Wie groß ist das Sparguthaben nach der letzten Ratenzahlung bei einem Zinssatz von 7% p. a.?

### **Mathematische Lösung**





**Abwandlung 1 p=9% p. a.**



**Abwandlung 2 p=1% p. a.**



**Umsetzung als Finanzpläne**

**p=7% p. a.**



**p=9% p. a.**



**p=1% p. a.**



K

## Hauptaufgaben

### Aufgabe 1

1. Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2019 (nach der Zinszahlung für 2019) € 16.000, —. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2020 vier Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 4.000, — auf sein Konto ein. Es folgt eine **zweite Phase**, in der er das vorhandene Kapital fünf Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto sechs Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 5.500, —. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der fünfzehn Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 2,5% p. a. aus!
2. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Einzahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!
3. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Auszahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!

### Mathematische Lösung

Einzahlungsphase

$K_n, K_0, (p, q)$   
 $n, z, ZW$

geg.:  $K_n$

geg.:  $K_0 = 16.000$

$p = 2,5 \quad q = 1,025$

$z = 4000 \quad n = 4$

ZW vor -  
Zins: 5

Wis.:  $K_n = K_0 q^n + z q \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$K_n = 16000 \cdot 1,025^4 + 4000 \cdot 1,025 \frac{1,025^4 - 1}{1,025 - 1}$$

34.686,32

## Vereinsumpfphase

Leibniz

ges.:  $K_m$

geg.:  $K_0 = 34.686,32$   $p = 2,5$   $q = 1,025$

$$n = 5$$

Lös.:  $K_m = K_0 \cdot q^n$

$$K_m = 34.686,32 \cdot 1,025^5 =$$
$$\underline{\underline{39.244,39}}$$

## Auszahlungsphase

ges.:  $K_m$

geg.:  $K_0 = 39.244,39$   $p = 2,5$   $q = 1,025$

$$n = 6$$

$$R_2 = -5500 \quad \text{Zw.}$$

unständig

Lös.:  $K_n = K_0 q^n + Z \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$K_n = 39.244,39 \cdot 1,025^6 -$$

$$5.500 \cdot 1,025 \cdot \frac{1,025^6 - 1}{1,025 - 1} = \underline{\underline{9.500,59}}$$

Am Ende verfüge wir über

€ 9.500,59



2) Umsetzung als Finanzplan

Einzahlungsphase

Einzahlungen

Auszahlungen

• vorläufige

%

Einzahlungen

Fehlmenge

• Zinsen auf

das Kapital

...

(1) Kapital zu Beginn

+ (2) + vorläufige Einzahlung i. H. v. € 4000,-

= (3) = korrigiertes Kapital zu Beginn

+ (4) + Zinsen auf korrig. Kap.

= (5) = Kapital am Ende

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3
(1)	16.000,-	20.500,-	25.112,50
f (2)	4.000,-	f 4.000,-	4.000,-
= (3)	20.000,-	= 24.500,-	= 29.112,50
f (4)	500,-	f 612,50	727,81
= (5)	20.500,-	= 25.112,50	= 29.840,31

Jahr 4 34.686,32

besteht.



### 3) Auszahlungsphase

Einzahlungen

- Zinsen auf das mitgeführte Kapital

Auszahlungen

- Auszahlung

i.H.v. € 5.500,-

Verzinsung

(1) Kapital zu Beginn

- (2) Auszahlung i.H.v. € 5.500,- Verzinsung

= (3) verzins. Kapital zu Beginn

+ (4) Zinsen auf verzins. Kapital

= (5) Kapital am Ende



Jahr 1

$$(1) \quad 39.244,39$$

$$- (2) \quad - 5.500, \text{---}$$

$$= (3) = 33.744,39$$

$$+ (4) \quad + 843,61$$

$$= (5) = 34.588, \text{---}$$

Jahr 2

$$34.588, \text{---}$$

$$- 5.500, \text{---}$$

$$= 29.088, \text{---}$$

$$+ 727,20$$

$$= 29.815,20$$

Jahr 3

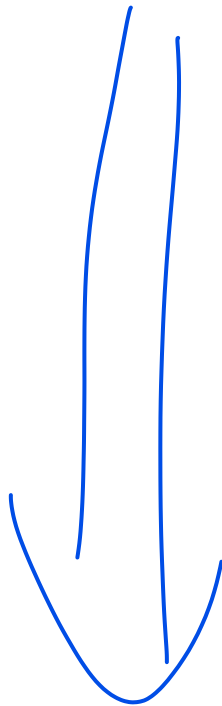
$$29.815,20$$

$$- 5500, \text{---}$$

$$= 24315,20$$

$$+ 607,88$$

$$= 24.923,08$$



1-17

in drei Phasen berechnen  
Zahlungswerte berechnen

### Aufgabe 2

1. Auf einem Konto befanden sich am 31. Dezember 2014 (nach der Zinszahlung für 2014) € 30.000, –. Der Kontoinhaber zahlt(e) von 2015 vier Jahre lang am **Ende** eines jeden Jahres € 4.000, – auf sein Konto ein. Es folgt eine zweite Phase, in der er das vorhandene Kapital drei Jahre zu Zins und Zinseszins anlegt. Danach entnimmt er seinem Konto vier Jahre lang am **Anfang** eines jeden Jahres € 11.000, –. Über welchen Betrag kann er nach Ablauf der elf Jahre verfügen? Gehen Sie bei Ihren Rechnungen von einem marktüblichen Zinssatz von 1,5% p. a. aus!
2. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Einzahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!
3. Erstellen Sie für die **ersten drei Jahre** der **Auszahlungsphase** den zugehörigen vollständigen Finanzplan!

### Mathematische Lösung





## **Umsetzung als Finanzplan**









### Aufgabe 3 (★★)

Um einen älteren Manager anwerben zu können, ist ein Unternehmen auf eine Pensionszulage eingegangen. Der betreffende Manager wurde zum 01.01.2020 eingestellt und soll ab 01.01.2024 eine Pensionszahlung von € 10 000,- pro Jahr zu Beginn des Jahres für die nächsten fünf Jahre ausgezahlt bekommen. Legen Sie im Folgenden einen Zinssatz von 6% p. a. zugrunde.

1. Welcher Betrag muss für den vorliegenden Rentenfall zurückgestellt werden, d. h. Ende 2023 zur Verfügung stehen?
2. Berechnen Sie die Zuführungen zu den Pensionsrückstellungen pro Periode (nachsüssige und konstante Einzahlungen am Jahresende)!
3. Stellen Sie den vollständigen Finanzplan auf, der den gesamten Vorgang beschreibt!

#### Mathematische Lösung



1.) von hinten ...

geg.:  $k = 10\,000$        $K_5 = 0$        $n = 5$   
 Verzinsung       $p = 6$        $f = 1,06$

ges.:  $K_0$

$$K_m = k \cdot f \cdot \frac{f^m - 1}{f - 1}$$

Los.:  $K_0 = \frac{K_m}{f^m}$

$$K_0 = \frac{0 - 10000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^5 - 1}{1,06 - 1}}{1,06^5}$$

$$= \underline{\underline{(-) 44.651,06}}$$

Ende 23/Anfang 24 mussa € 44.651,06  
beschlehen. (über die Periode 24 bis 28)

2) Geg.:  $K_0 = 0$ ,  $K_n = 44.651,06$   
 $n = 4$   $p = 6$   $q = 1,06$   
nachdring

Ges:  $k$

$$\text{Lis: } k = \frac{K_n - K_0 q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$k = \frac{44.651,06 - 0 \cdot 1,06^4}{\frac{1,06^4 - 1}{1,06 - 1}}$$

$$= \underline{\underline{10.206,85}}$$

Das Unternehmen zahlt jeweils

€ 10.206,85.

12.02.2024

## Ausparphase

Einzahlungen

- Hfd. Zuführung i. H.v. € 10.206,85
- Einsetzug auf das mit-  
geführte Kapital

## Einparphase

Auszahlungen

- Hfd. Zahlung an den  
Manager i. H.v. € 1000,-

Einrichtung

- Einsetzen auf das mitge-  
führte Kapital



