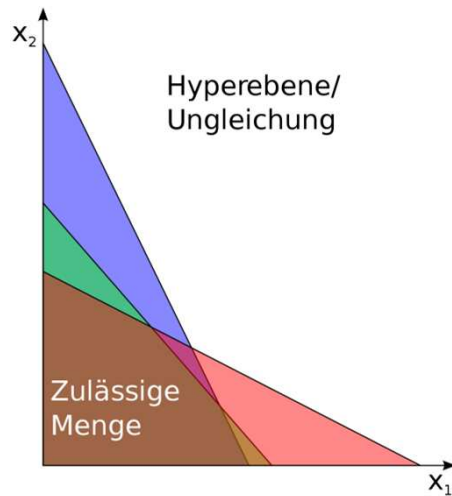


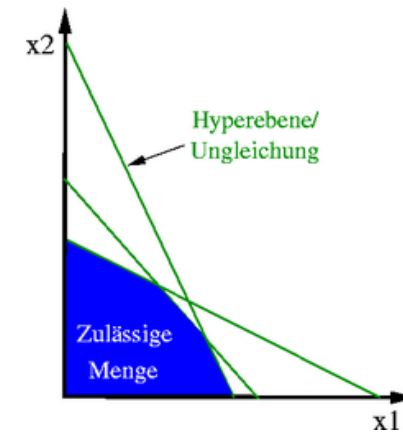
Zwei weitere Beispiele zur Linearen Programmierung

$$\text{minimize } \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{subject to } \begin{aligned} \sum_{i \in F} x_{ij} &= 1, & \forall j \in D, \\ x_{ij} &\leq y_i, & \forall i \in F, j \in D, \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i \in F, j \in D, \\ y_i &\geq 0, & \forall i \in F, \end{aligned}$$



C_B	C_j	60	100	80	0	0	0	RHS	Ratio
	Basis	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
100	x_2	1	1	1	1	0	0	500	
0	S_2	-1	0	1	-4	1	0	500	
0	S_3	-5	0	-3	-15	0	1	500	
	$Z_j - C_j$	40	0	20	100	0	0	$Z^* = 50.000$	



Was auch passieren kann...

Gegeben sei folgendes Maximierungsproblem, das wir grafisch wollen:

Zielfunktion: $z = 2x + 2,5y \rightarrow \max!$ - 2

Nebenbedingungen:

$$4x + 5y \leq 60$$

$$x \leq 10$$

$$y \leq 8$$

Paralleler
Verlauf
(siehe unten)

Nichtnegativitätsbedingung: $x \geq 0; y \geq 0$

- Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!
- Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?
- Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert!
Wie lautet Ihre Entscheidung?
- Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie zusätzlich die Zielfunktion in das Koordinatensystem eintragen. Wähle $z = 10$

a) Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!

Nebenbedingungen: NB I: $4x + 5y \leq 60$

NB II: $x \leq 10$

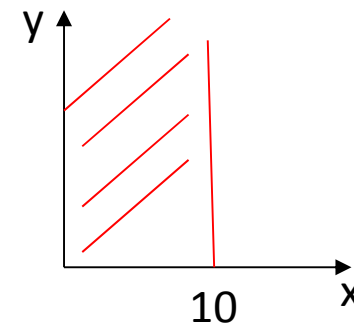
NB III: $x \leq 8$

NB I: $4x + 5y \leq 60$
 $4x + 5y = 60$

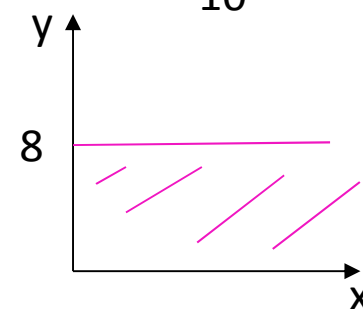


wenn $x=0$ \Rightarrow $y = 12$ $(0/12)$
wenn $y=0$ \Rightarrow $x = 15$ $(15/0)$

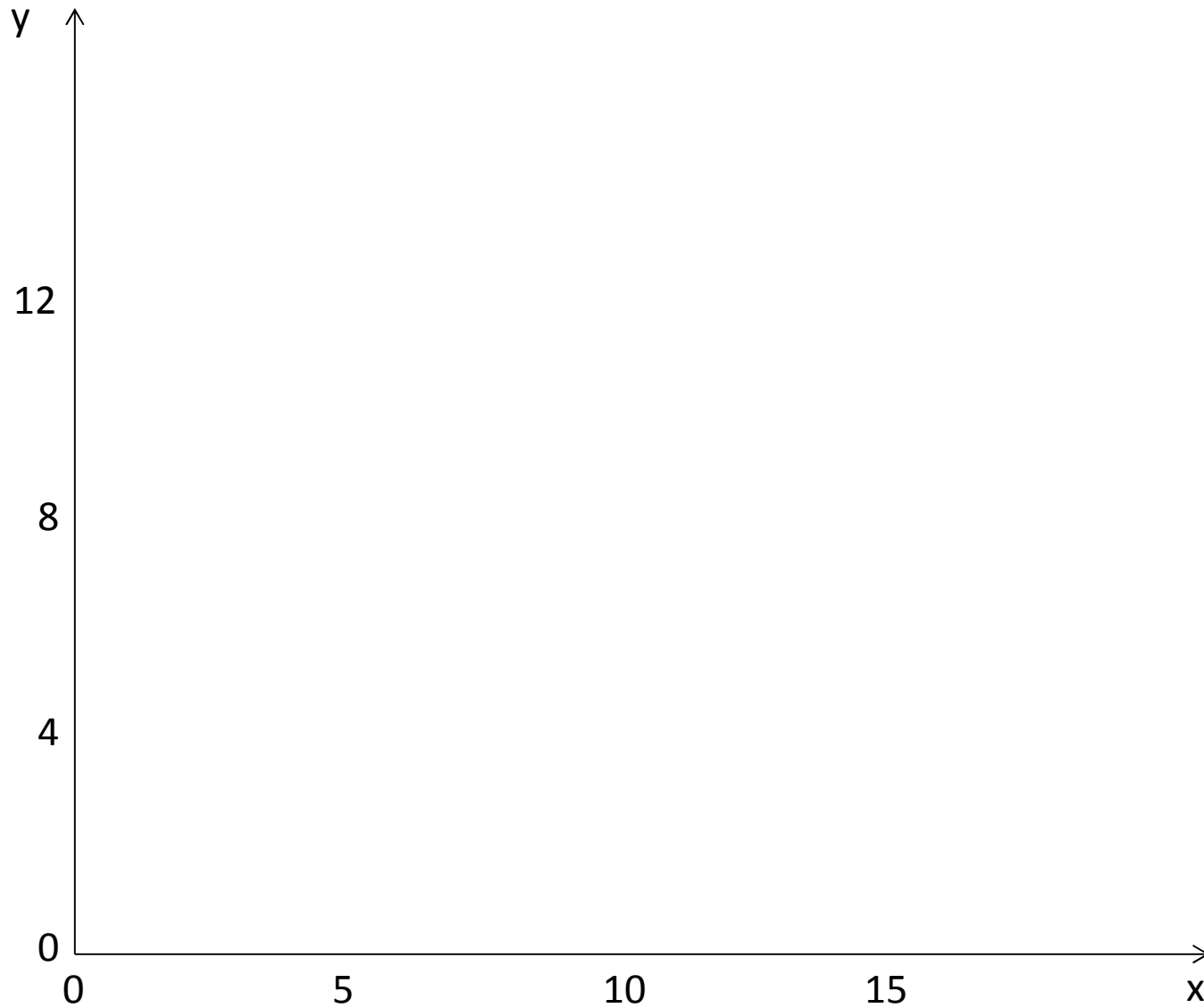
NB II: $x \leq 10$
 $x = 10$



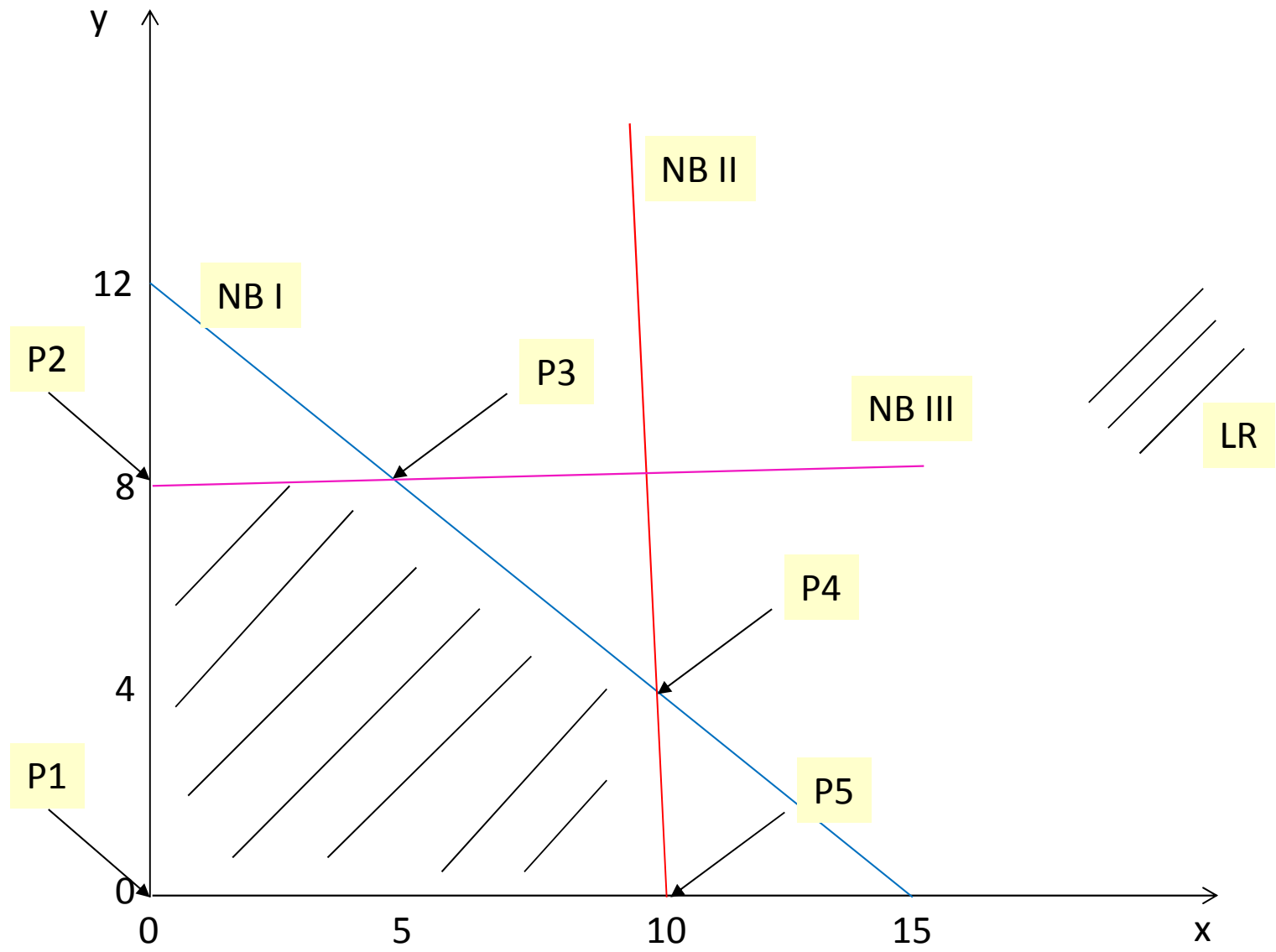
NB III: $y \leq 8$
 $y = 8$



b) Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?



b) Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?



P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I} \quad 4x + 5y = 60$$

$$\text{III} \quad y = 8$$

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

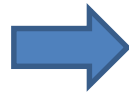
P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I} \quad 4x + 5y = 60$$

$$\text{III} \quad y = 8$$



durch bloßes Einsetzen...

$$\text{III in I} \quad 4x + 5 \cdot 8 = 60$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

P3 also:

(5, 8)



P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (5, 8) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

Berechnung von P4

$$\text{I} \quad 4x + 5y = 60$$

$$\text{II} \quad x = 10$$

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (5, 8) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

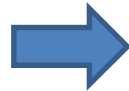
P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I} \quad 4x + 5y = 60$$

$$\text{II} \quad x = 10$$



durch bloßes Einsetzen...

$$\text{III in I} \quad 4 \cdot 10 + 5y = 60$$

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

P4 also:

(10, 4)



c) Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (5, 8) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (10, 4) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

$$z = f(x, y) = 2x + 2,5y \rightarrow \max!$$

P1: $z(0, 0) =$

P2: $z(0, 8) =$

P3: $z(5, 8) =$

P4: $z(10, 4) =$

P5: $z(10, 0) =$

c) Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

P1 (0, 0)

P2 (0, 8)

P3 (5, 8) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (10, 4) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (10, 0)

$$z = f(x, y) = 2x + 2,5y \rightarrow \max!$$

$$\text{P1: } z(0, 0) = 2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 = 0$$

$$\text{P2: } z(0, 8) = 2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 8 = 20$$

$$\text{P3: } z(5, 8) = 2 \cdot 5 + 2,5 \cdot 8 = 30$$

$$\text{P4: } z(10, 4) = 2 \cdot 10 + 2,5 \cdot 4 = 30$$

$$\text{P5: } z(10, 0) = 2 \cdot 10 + 2,5 \cdot 0 = 20$$

Die gesuchte
extremale Lösung
liegt an **maxi-**
der **Wert** einer
Ecke des LR

Was ist nun?



$$\begin{aligned} \text{P1: } z(0, 0) &= 2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 = 0 \\ \text{P2: } z(0, 8) &= 2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 8 = 20 \\ \text{P3: } z(5, 8) &= 2 \cdot 5 + 2,5 \cdot 8 = 30 \\ \text{P4: } z(10, 4) &= 2 \cdot 10 + 2,5 \cdot 4 = 30 \\ \text{P5: } z(10, 0) &= 2 \cdot 10 + 2,5 \cdot 0 = 20 \end{aligned}$$

Die Interpretation, P3 und P4 führen zur optimalen Lösung greift zu kurz!



d) Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie zusätzlich die Zielfunktion in das Koordinatensystem eintragen. Wähle $z = 10$!

in der Regel ersetzt durch

Wir zeichnen nun die Zielfunktion in das Koordinatensystem, Und verfahren genau wie bei den Nebenbedingungen!



Interpretiere

aus-

Also

fröhlich !!!

ZF: $2x + 2,5y = 10$

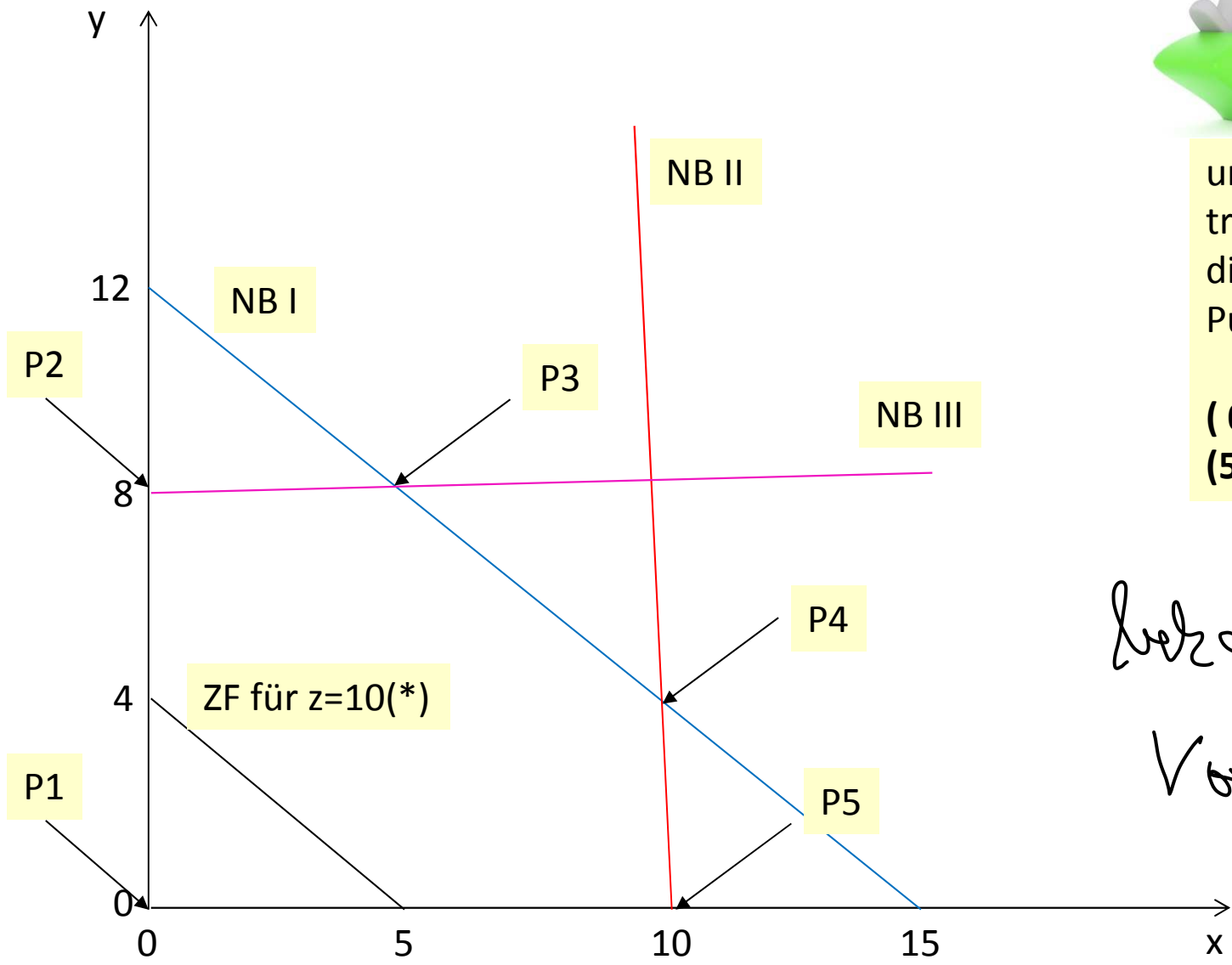


wenn $x=0$  $y= 4$

$(0/4)$

wenn $y=0$  $x= 5$

$(5/0)$



und nun
tragen wir
diese beiden
Punkte ab!

(0/4)
(5/0)

bekanntes
Vorgehen aus
der VWL
anwenden

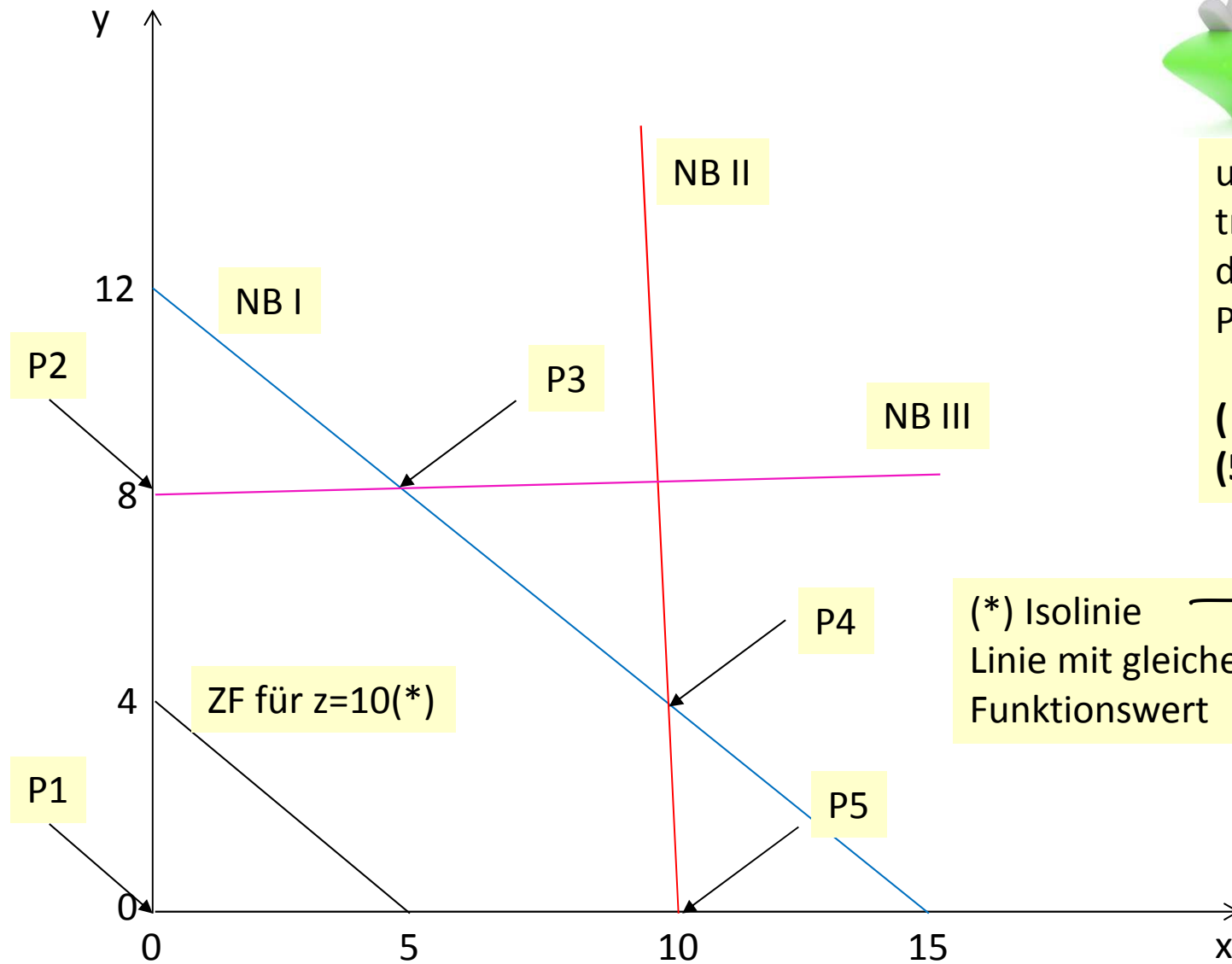


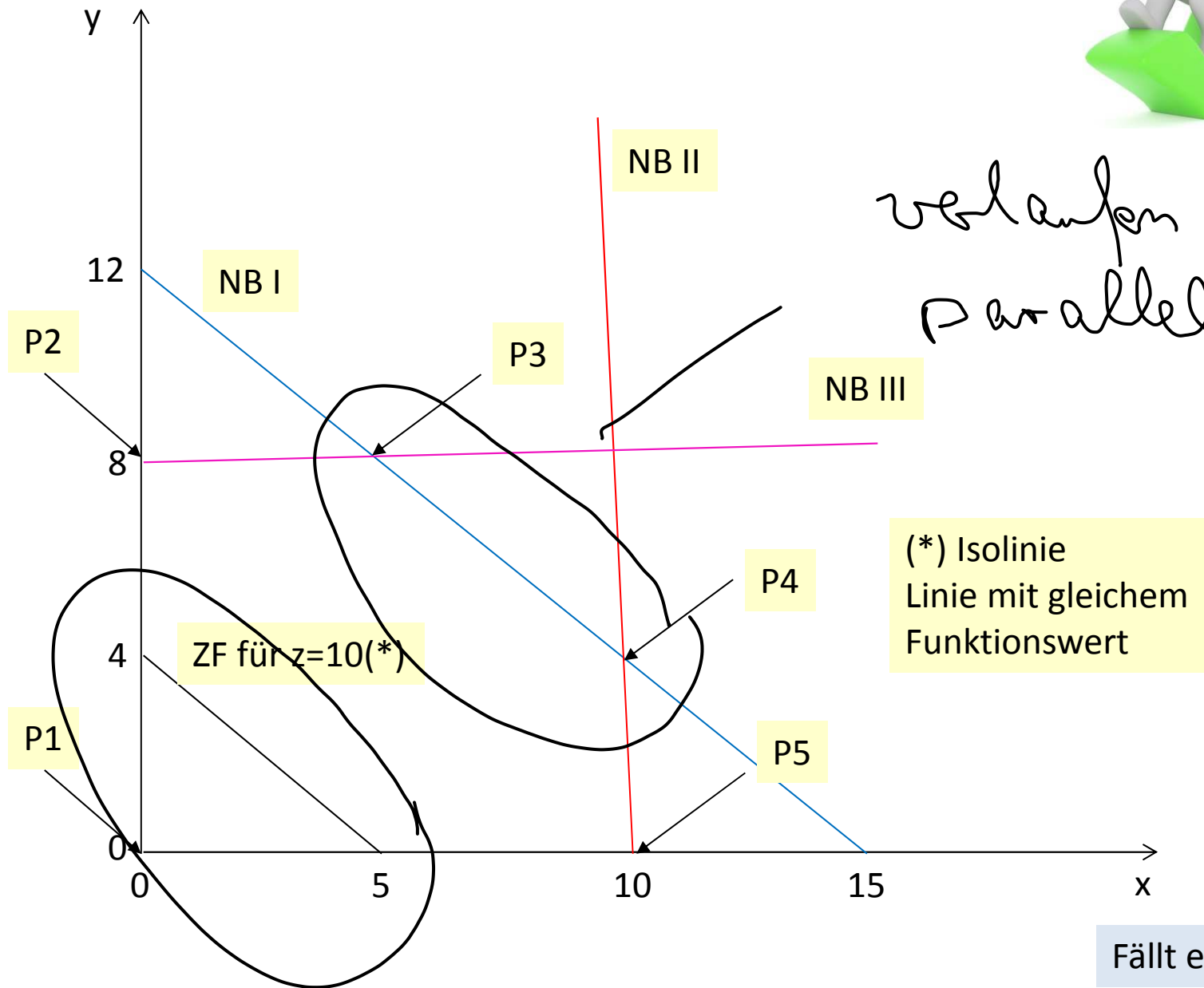
und nun
tragen wir
diese beiden
Punkte ab!

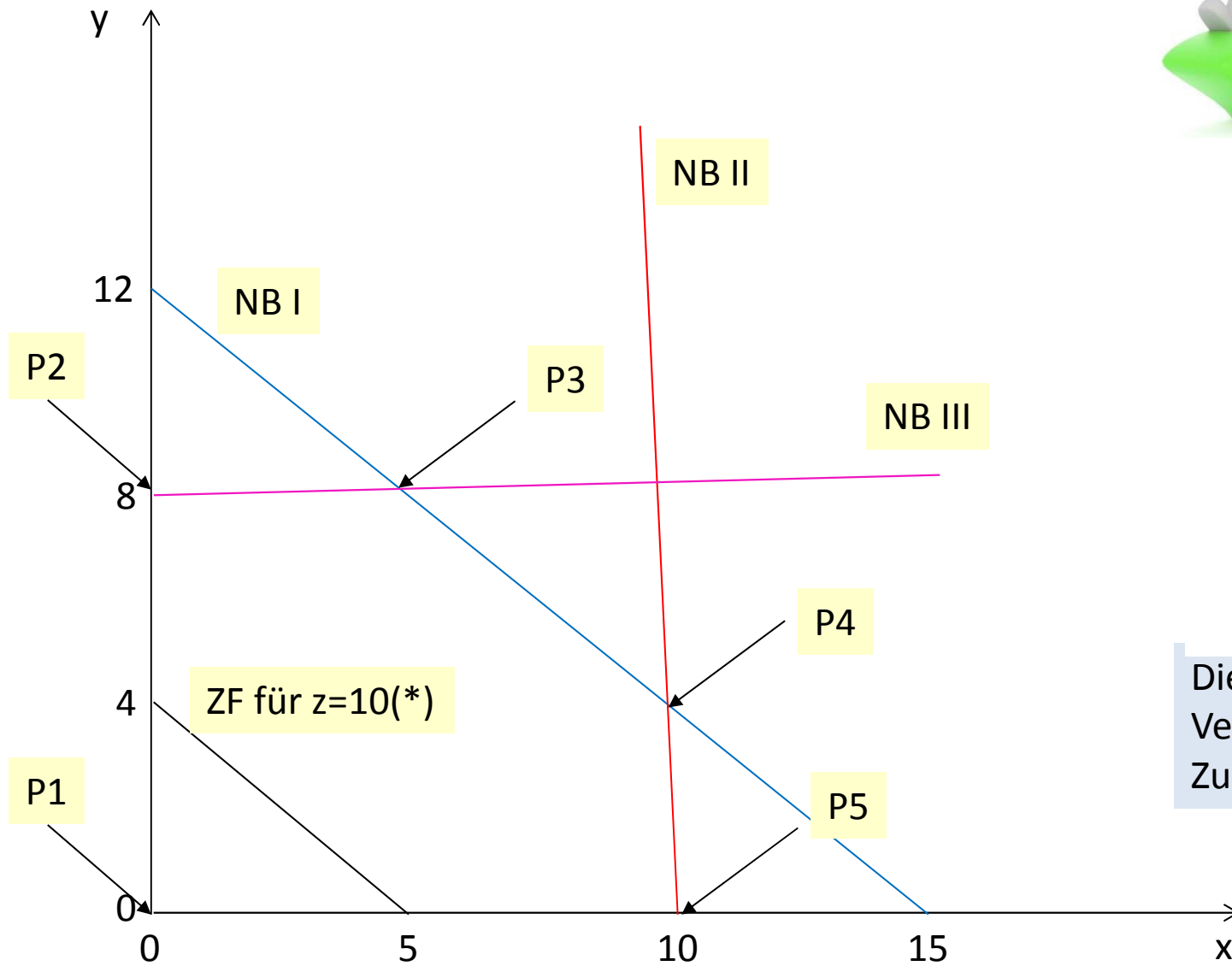
$(0/4)$
 $(5/0)$

(*) Isolinie
Linie mit gleichem
Funktionswert

→ VWL



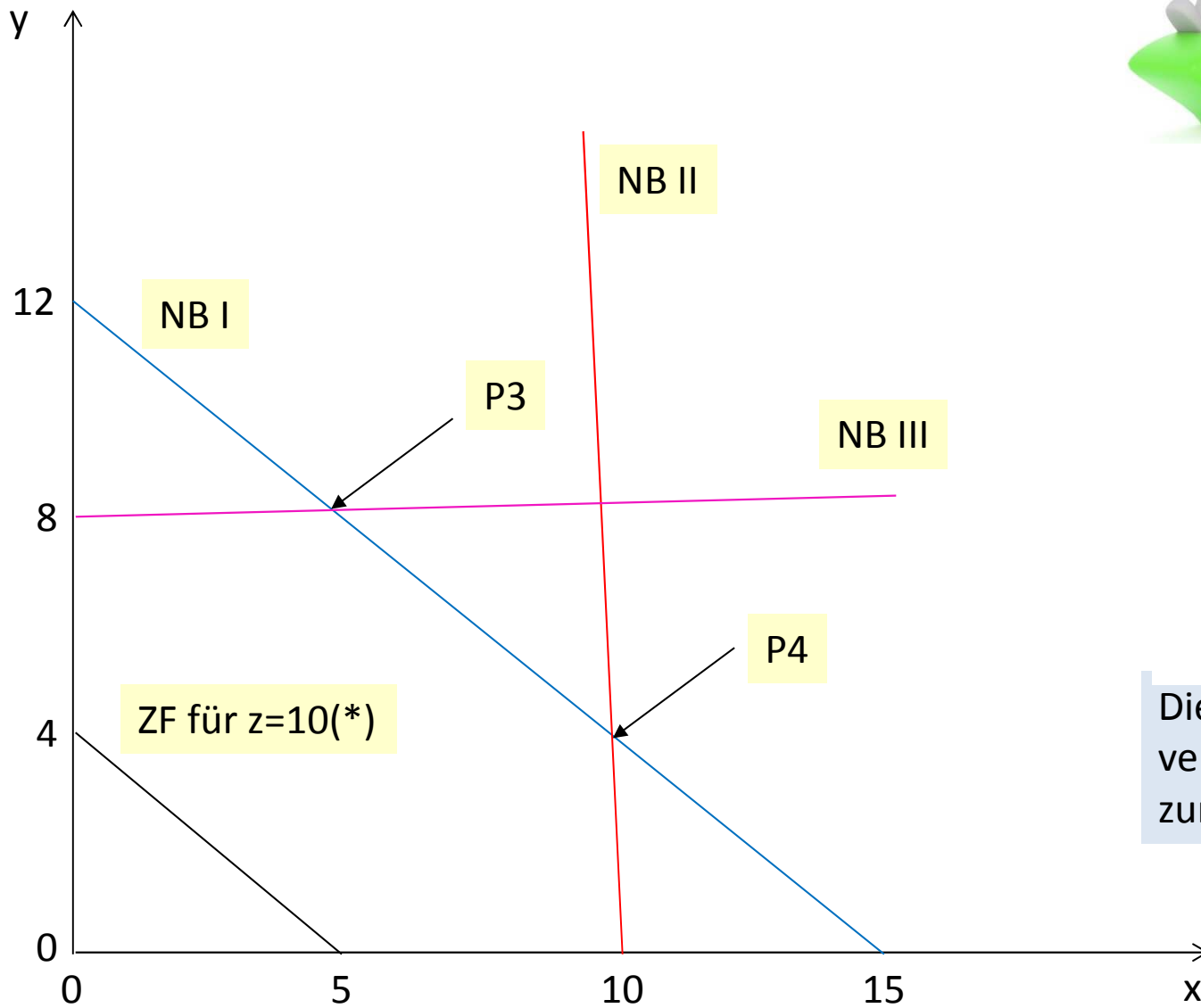




Die Linie $z=10$
Verläuft parallel
Zur Linie für NB I

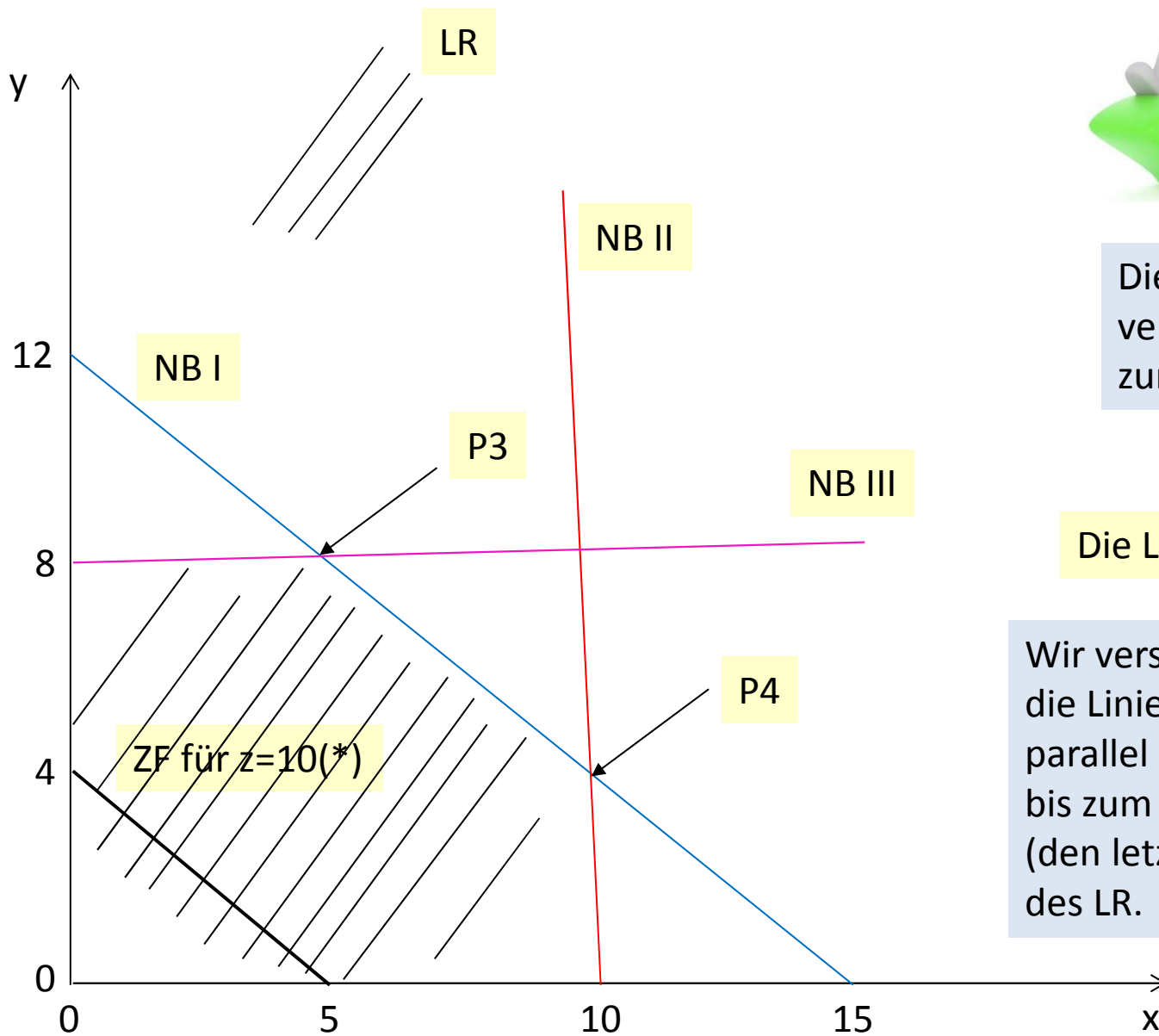
!

!



Die Linie $z=10$ verläuft parallel zur Linie für NB I



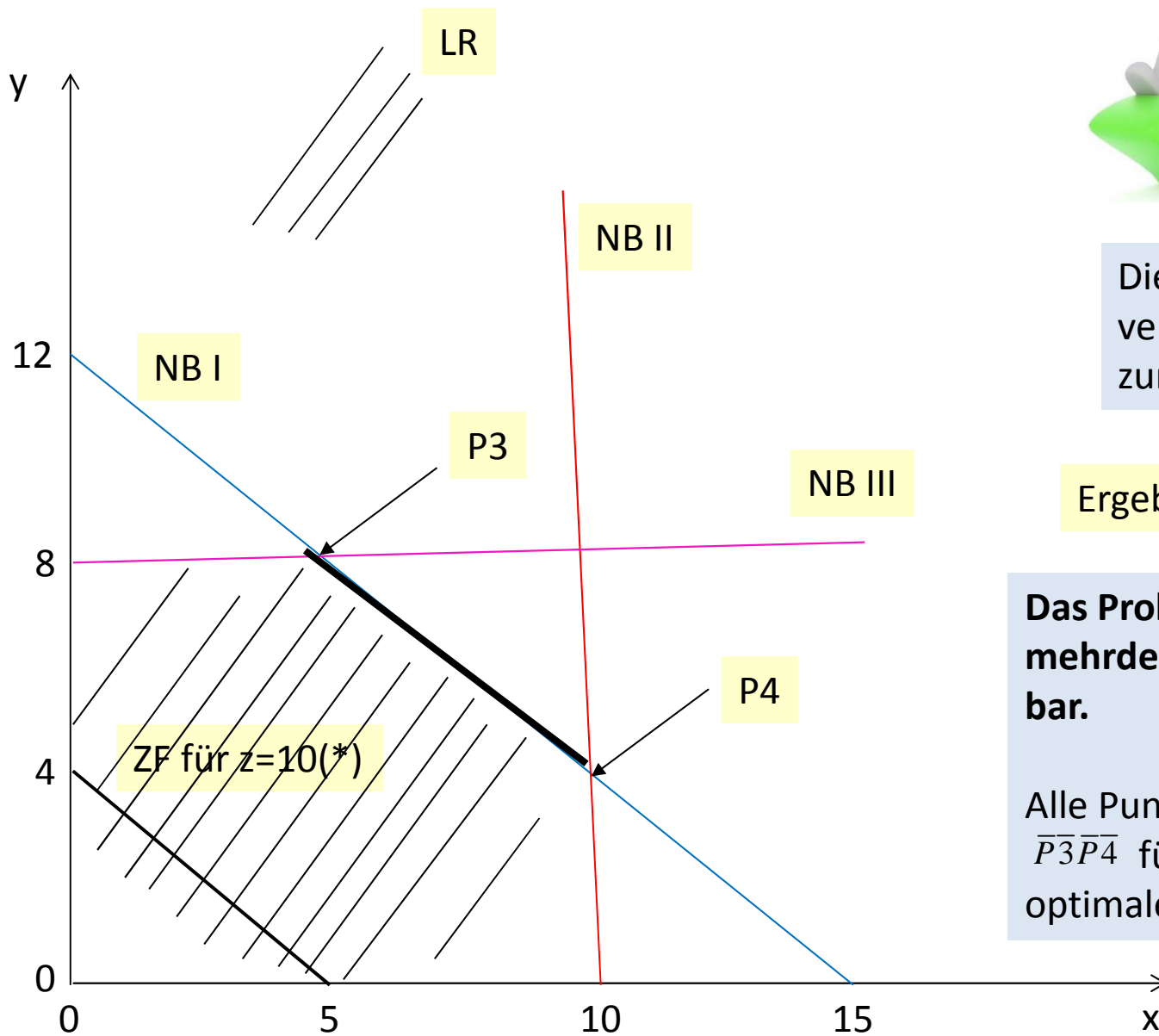


Die Linie $z=10$ verläuft parallel zur Linie für NB I

Die Lösung:

Wir verschieben die Linie $z=10$ parallel nach oben bis zum letzten Punkt (den letzten Punkten) des LR.





Die Linie $z=10$ verläuft parallel zur Linie für NB I

Ergebnis:

Das Problem ist mehrdeutig lösbar.
Alle Punkte auf $\overline{P3P4}$ führen zur optimalen Lösung

!
mehrfachse Lösung

Hausaufgabe

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte – Produkt 1 und Produkt 2 – her, die die drei Maschinentypen A, B und C passieren müssen. Die folgende Tabelle enthält die notwendigen Bearbeitungszeiten pro Mengeneinheit (ME), die täglich zur Verfügung stehenden Maschinenkapazitäten und den Gewinn pro Mengeneinheit in Geldeinheiten (GE) für jedes Produkt:

Maschine	Bearbeitungszeit in h/ME		Maschinenkapazität (in h)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	1	2	170
B	2	2	300
C	0	1	60
Gewinn (in GE/ME)	300	400	

K

1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!
2. Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!
3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden. *min 20 m. 91k berechnen werden*
4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

Maschine	Bearbeitungszeit in h/ME		Maschinenkapazität (in h)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	1	2	170
B	2	2	300
C	0	1	60
Gewinn (in GE/ME)	300	400	

1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!

Variablendefinition: x : Anzahl von Produkt 1 $\left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \right\}$
 y : Anzahl von Produkt 2 $\left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \right\}$

Zielfunktion: $z = f(x, y) = 300x + 400y \rightarrow \max!$

Nebenbedigungen: **NB I:** $x + 2y \leq 170$

NB II: $2x + 2y \leq 300$

NB III: $y \leq 60$

Nichtnegativitätsbed.: $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \right\}$

2. Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!



Nebenbedingungen: NB I: $x + 2y \leq 170$

NB II: $2x + 2y \leq 300$

NB III: $y \leq 60$



NB I: $x + 2y \leq 170$
 $x + 2y = 170$



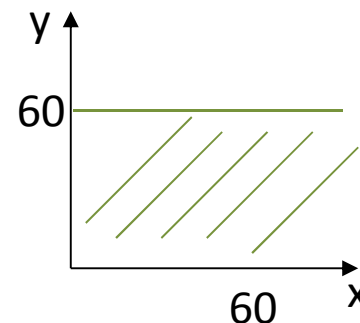
wenn $x=0$  $Y = 85$ $(0/85)$
wenn $y=0$  $x = 170$ $(170/0)$

NB II: $2x + 2y \leq 300$
 $2x + 2y = 300$

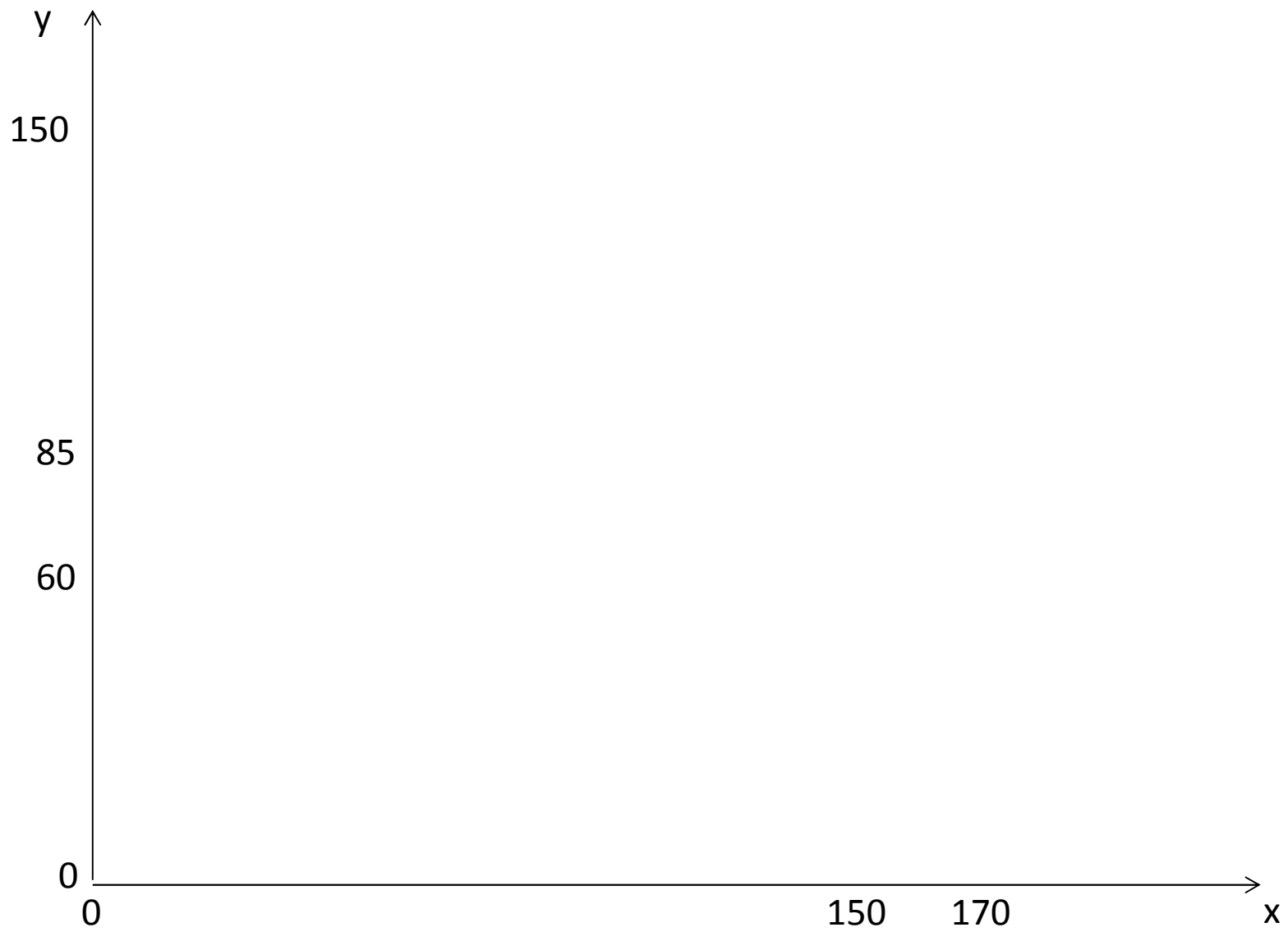


wenn $x=0$  $Y = 150$ $(0/150)$
wenn $y=0$  $x = 150$ $(150/0)$

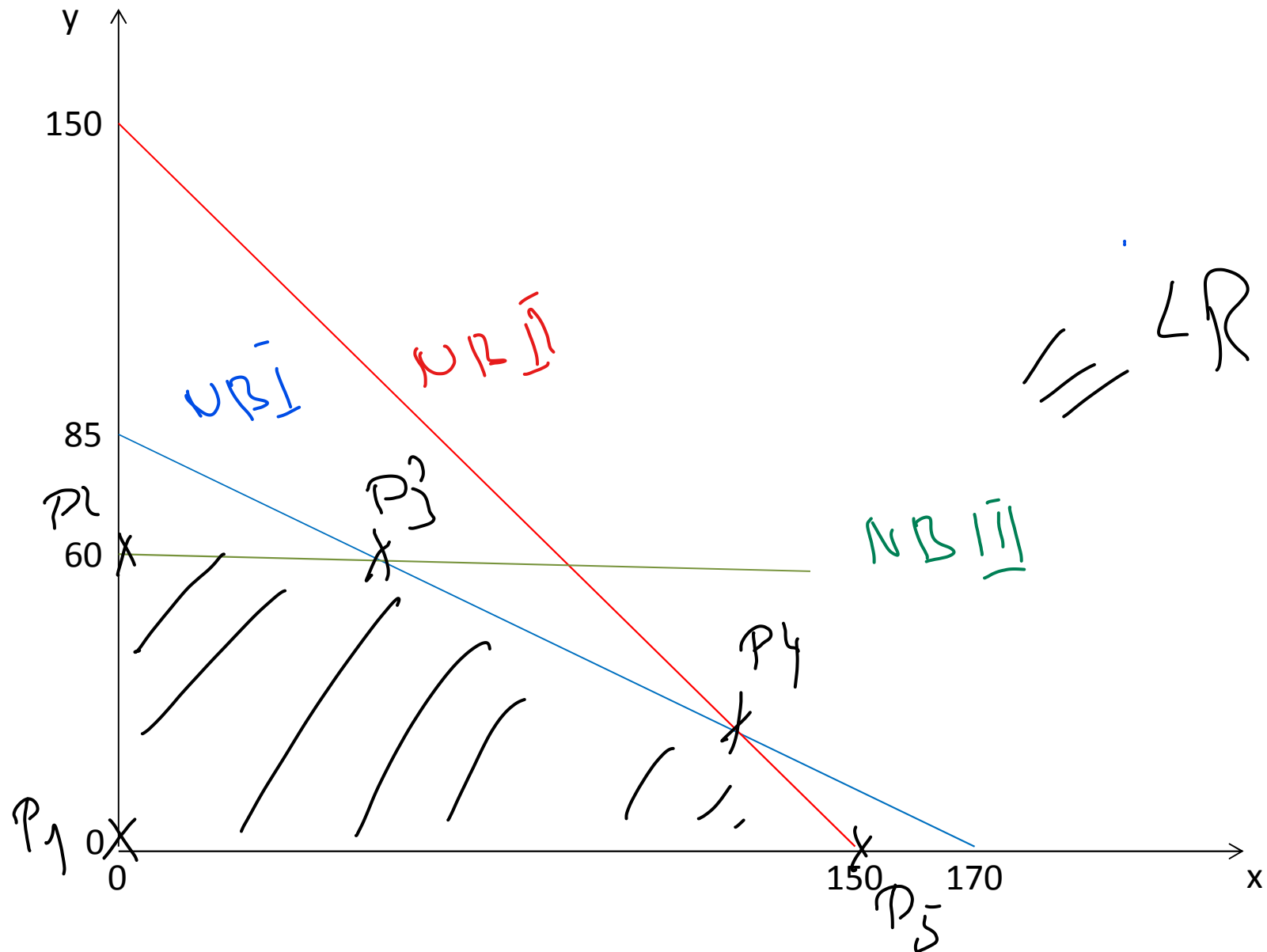
NB III: $y \leq 60$
 $y = 60$



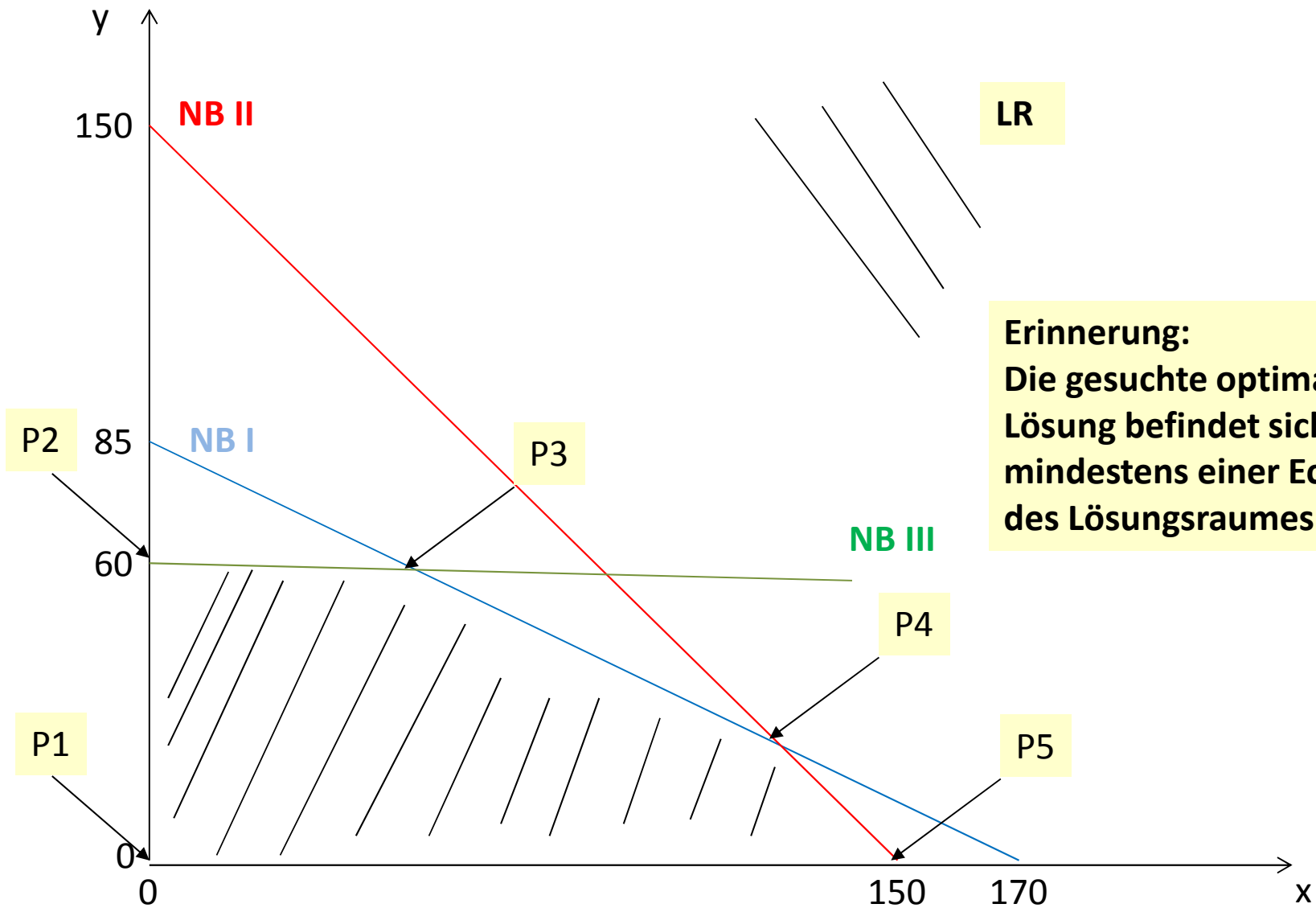
Parallel zur x-Achse



3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I} \quad x + 2y = 170$$

$$\text{III} \quad y = 60$$

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

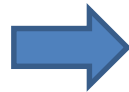
P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

Berechnung von P3

I $x + 2y = 170$

III $y = 60$



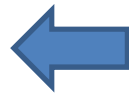
durch bloßes Einsetzen...

III in I $x + 2 \cdot 60 = 170$

$x = 50$

P3 also:

P3 (50, 60)



P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (50, 60) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

Berechnung von P4

$$\text{I} \quad x + 2y = 170$$

$$\text{II} \quad 2x + 2y = 300$$

Wie lösen wir dieses Gleichungssystem?

→ solche Probleme entstehen
bei "fester" Leidenschaft nicht

P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (50, 60) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

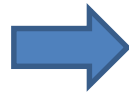
P4 (,) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

Berechnung von P4

$$\text{I} \quad x + 2y = 170$$

$$\text{II} \quad 2x + 2y = 300$$



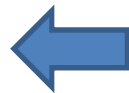
z. B. über das Additionsverfahren:

$$\text{I} \quad x + 2y = 170$$

$$- \text{II} \quad -(2x + 2y) = 300$$

$$= \quad -x \quad = -130$$

$$x = 130$$



P3 also:

P3 (130, 20)

eingesetzt in I $130 + 2y = 170$

$$2y = 40$$

$$y = 20$$

4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert!
Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (50, 60) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (130, 20) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

$$z = f(x, y) = 300x + 400y \quad \rightarrow \text{max!}$$

$$\text{P1: } z(0, 0) =$$

$$\text{P2: } z(0, 60) =$$

$$\text{P3: } z(50, 60) =$$

$$\text{P4: } z(130, 20) =$$

$$\text{P5: } z(150, 0) =$$

**4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert!
Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!**

P1 (0, 0)

P2 (0, 60)

P3 (50, 60) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P4 (130, 20) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P5 (150, 0)

$$z = f(x, y) = 300x + 400y \rightarrow \max!$$

$$\text{P1: } z(0, 0) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 0 = 0$$

$$\text{P2: } z(0, 60) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 60 = 24.000$$

$$\text{P3: } z(50, 60) = 300 \cdot 50 + 400 \cdot 60 = 39.000$$

$$\text{P4: } z(130, 20) = 300 \cdot 130 + 400 \cdot 20 = 47.000$$

$$\text{P5: } z(150, 0) = 300 \cdot 150 + 400 \cdot 0 = 45.000$$

$$\begin{aligned}
 \text{P1: } z(0, 0) &= 300 * 0 + 400 * 0 = 0 \\
 \text{P2: } z(0, 60) &= 300 * 0 + 400 * 60 = 24.000 \\
 \text{P3: } z(50, 60) &= 300 * 50 + 400 * 60 = 39.000 \\
 \text{P4: } z(130, 20) &= 300 * 130 + 400 * 20 = 47.000 \\
 \text{P5: } z(150, 0) &= 300 * 150 + 400 * 0 = 45.000
 \end{aligned}$$

Interpretation 1: das interpretieren, was dasteht

Also: Es werden 130 Stück von Produkt 1 und 20 Stück von Produkt 2 bei einem maximalen Gewinn von 47.000 Geldeinheiten.

hergestellt.

Aber: Wissen wir noch mehr???

Ja klar, hier die Maschinenkapazitäten, was ist mit diesen?

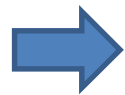
$$\begin{aligned}
 \text{P1: } z(0, 0) &= 300 * 0 + 400 * 0 = 0 \\
 \text{P2: } z(0, 60) &= 300 * 0 + 400 * 60 = 24.000 \\
 \text{P3: } z(50, 60) &= 300 * 50 + 400 * 60 = 39.000 \\
 \text{P4: } z(130, 20) &= 300 * 130 + 400 * 20 = 47.000 \\
 \text{P5: } z(150, 0) &= 300 * 150 + 400 * 0 = 45.000
 \end{aligned}$$

$$\text{NB I: } x + 2y \leq 170$$

$$\text{NB II: } 2x + 2y \leq 300$$

$$\text{NB III: } y \leq 60$$

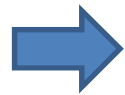
$$\text{NB I: } x + 2y \leq 170$$



$$1 * 130 + 2 * 20 = 170 \text{ erfüllt}$$

Bei Maschine A verbleibt keine freie Kapazität.

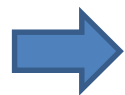
$$\text{NB II: } 2x + 2y \leq 300$$



$$2 * 130 + 2 * 20 = 300 \text{ erfüllt}$$

Bei Maschine B verbleibt keine freie Kapazität.

$$\text{NB III: } y \leq 60$$



$$20 \leq 60 \text{ erfüllt}$$

Bei Maschine C verbleiben 40h freie Kapazität.



MERCI