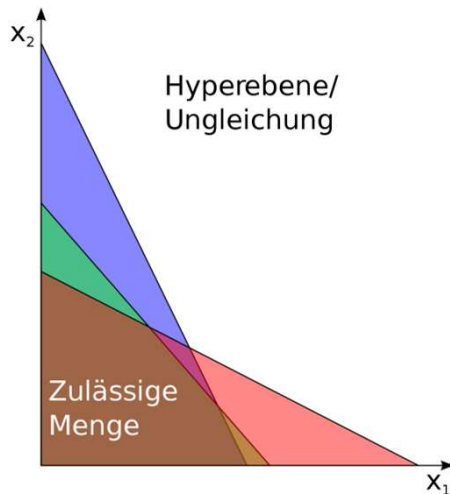
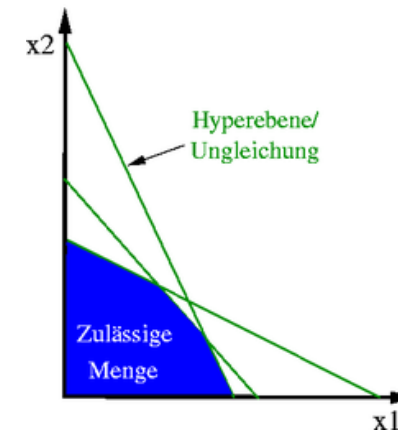


# Ein weiteres Beispiel zur Linearen Programmierung

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte – Produkt 1 und Produkt 2 – mit den drei Rohstoffen A, B und C her. Die folgende Tabelle enthält die benötigten Rohstoffmengen pro Mengeneinheit (ME) der Produkte, die täglich zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen (in ME) und den Gewinn pro Mengeneinheit in Geldeinheiten (GE) für jedes Produkt:



$C_B$	$C_j$	60	100	80	0	0	0	RHS	Ratio
	Basis	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
100	$x_2$	1	1	1	1	0	0	500	
0	$S_2$	-1	0	1	-4	1	0	500	
0	$S_3$	-5	0	-3	-15	0	1	500	
$Z_j - C_j$		40	0	20	100	0	0	$Z^* = 50.000$	



### **Aufgabe 1**

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte – Produkt 1 und Produkt 2 – mit den drei Rohstoffen A, B und C her. Die folgende Tabelle enthält die benötigten Rohstoffmengen pro Mengeneinheit (ME) der Produkte, die täglich zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen (in ME) und den Gewinn pro Mengeneinheit in Geldeinheiten (GE) für jedes Produkt:

<b>Rohstoffe</b>	<b>Benötigte Mengen zur Produktion von je einer Einheit</b>		<b>Rohstoffmengen (in ME)</b>
	<b>Produkt 1</b>	<b>Produkt 2</b>	
<b>A</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>180</b>
<b>B</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>100</b>
<b>C</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>50</b>
<b>Gewinn (in GE/ME)</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	

- 1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!**
- 2. Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!**
- 3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.**
- 4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!**

1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!

Rohstoffe	Benötigte Mengen zur Produktion von je einer Einheit		Rohstoffmengen (in ME)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	3	2	180
B	1	2	100
C	1	0	50
Gewinn (in GE/ME)	100	150	

Rohstoffe	Benötigte Mengen zur Produktion von je einer Einheit		Rohstoffmengen (in ME)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	3	2	180
B	1	2	100
C	1	0	50
Gewinn (in GE/ME)	100	150	

Variablendefinition:  $x$ : Anzahl von Produkt 1  
 $y$ : Anzahl von Produkt 2

Zielfunktion:  $z = f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow \max!$

Nebenbedingungen: NB I:  $3x + 2y \leq 180$

NB II:  $x + 2y \leq 100$

NB III:  $x \leq 50$

Nichtnegativitätsbed.:  $x \geq 0 \quad y \geq 0$

2. Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!

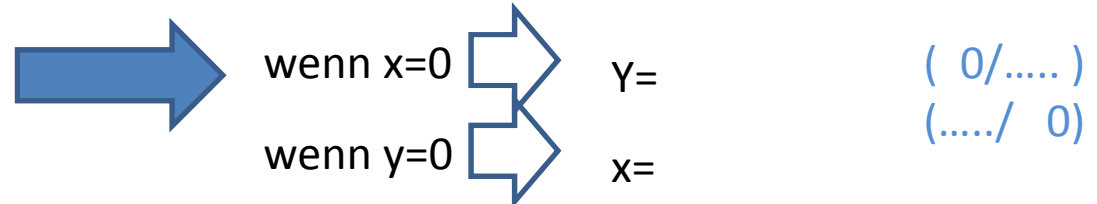
Nebenbedingungen:

NB I:  $3x + 2y \leq 180$

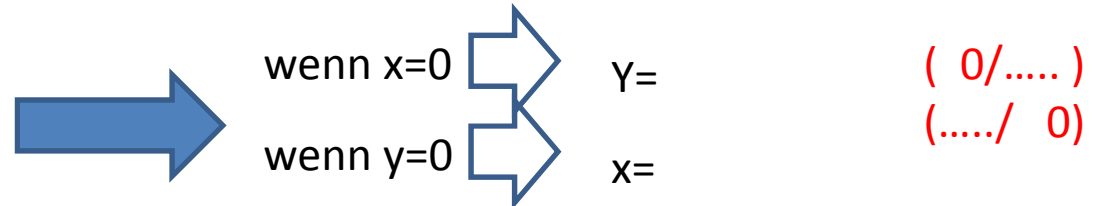
NB II:  $x + 2y \leq 100$

NB III:  $x \leq 50$

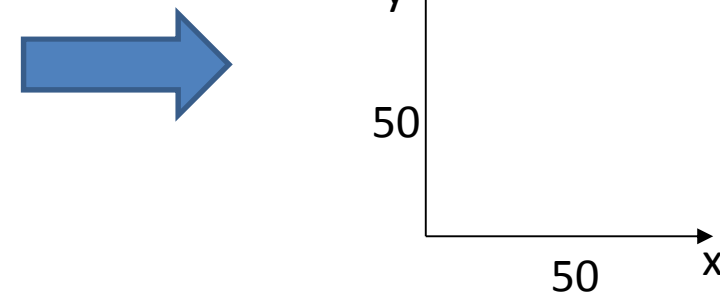
NB I:  $3x + 2y \leq 180$   
 $3x + 2y = 180$

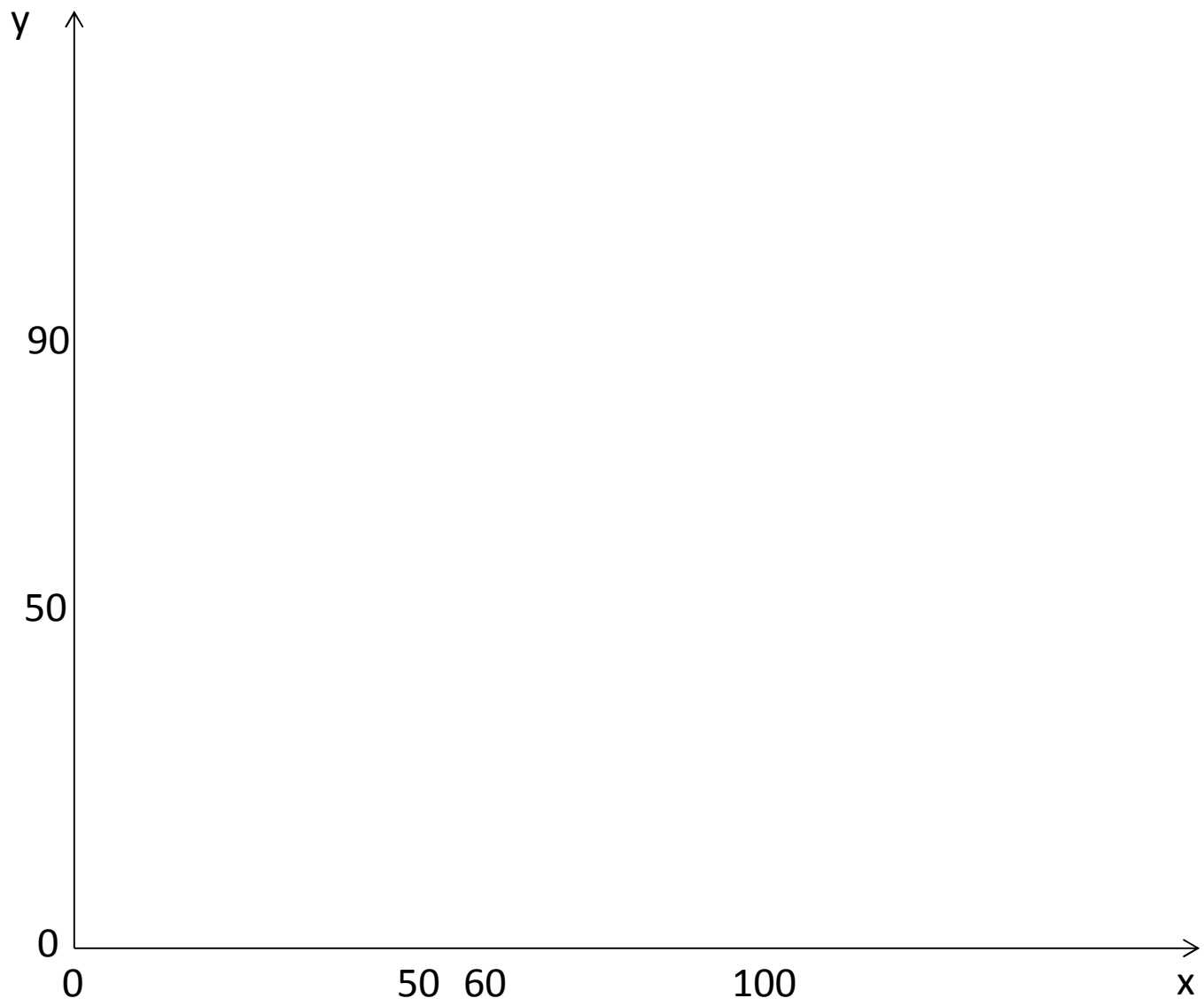


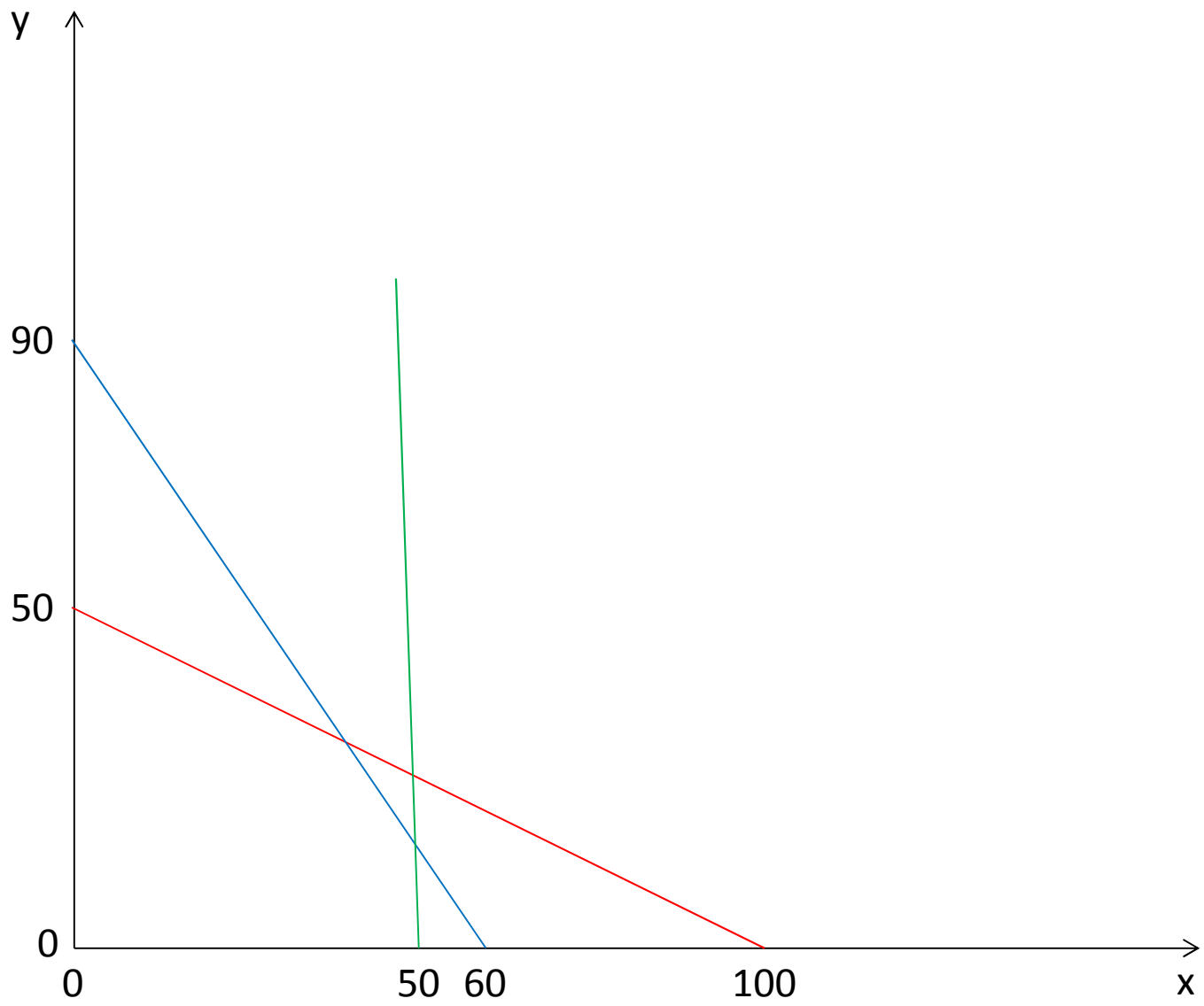
NB II:  $x + 2y \leq 100$   
 $x + 2y = 100$



NB III:  $x \leq 50$   
 $x = 50$

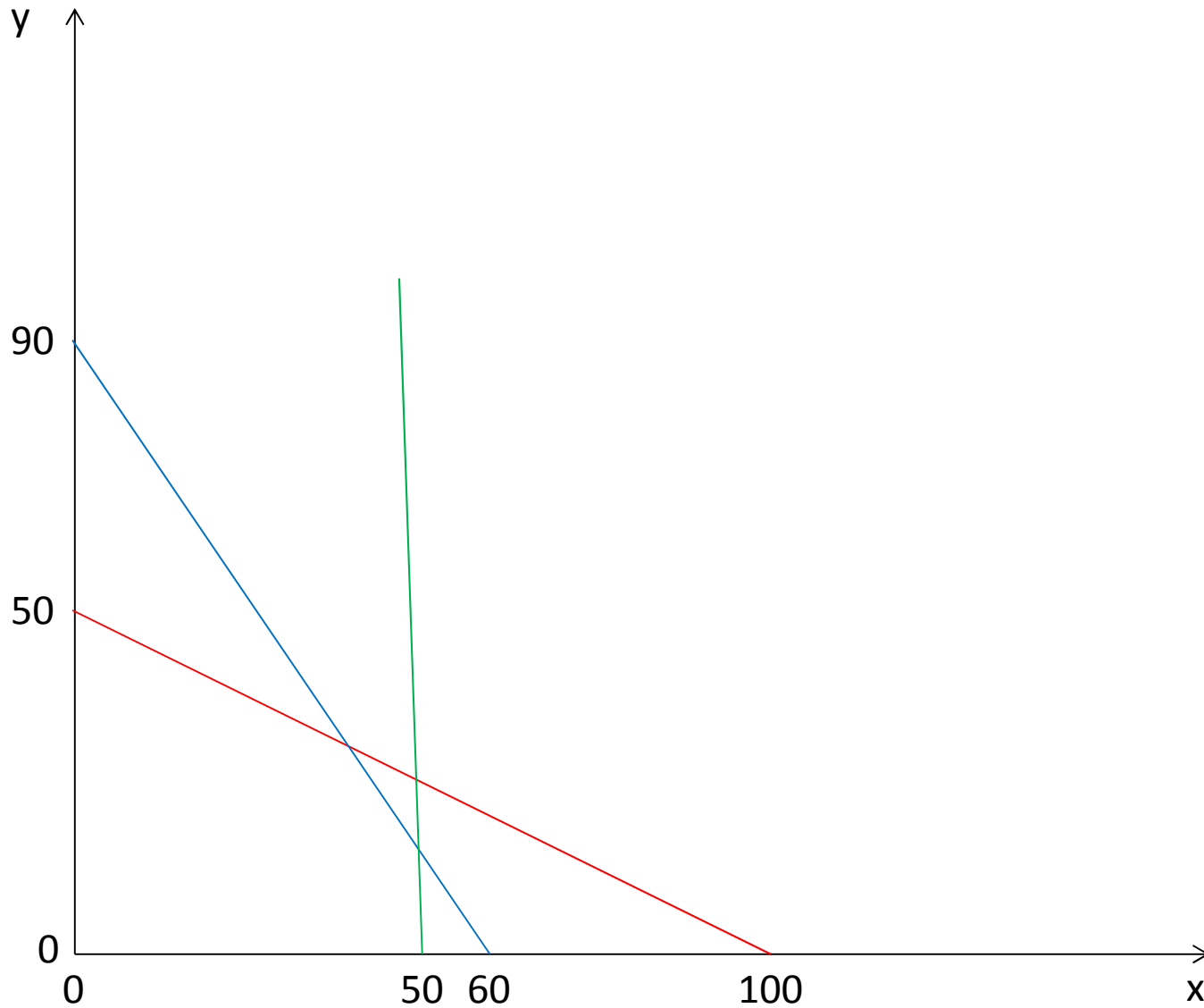




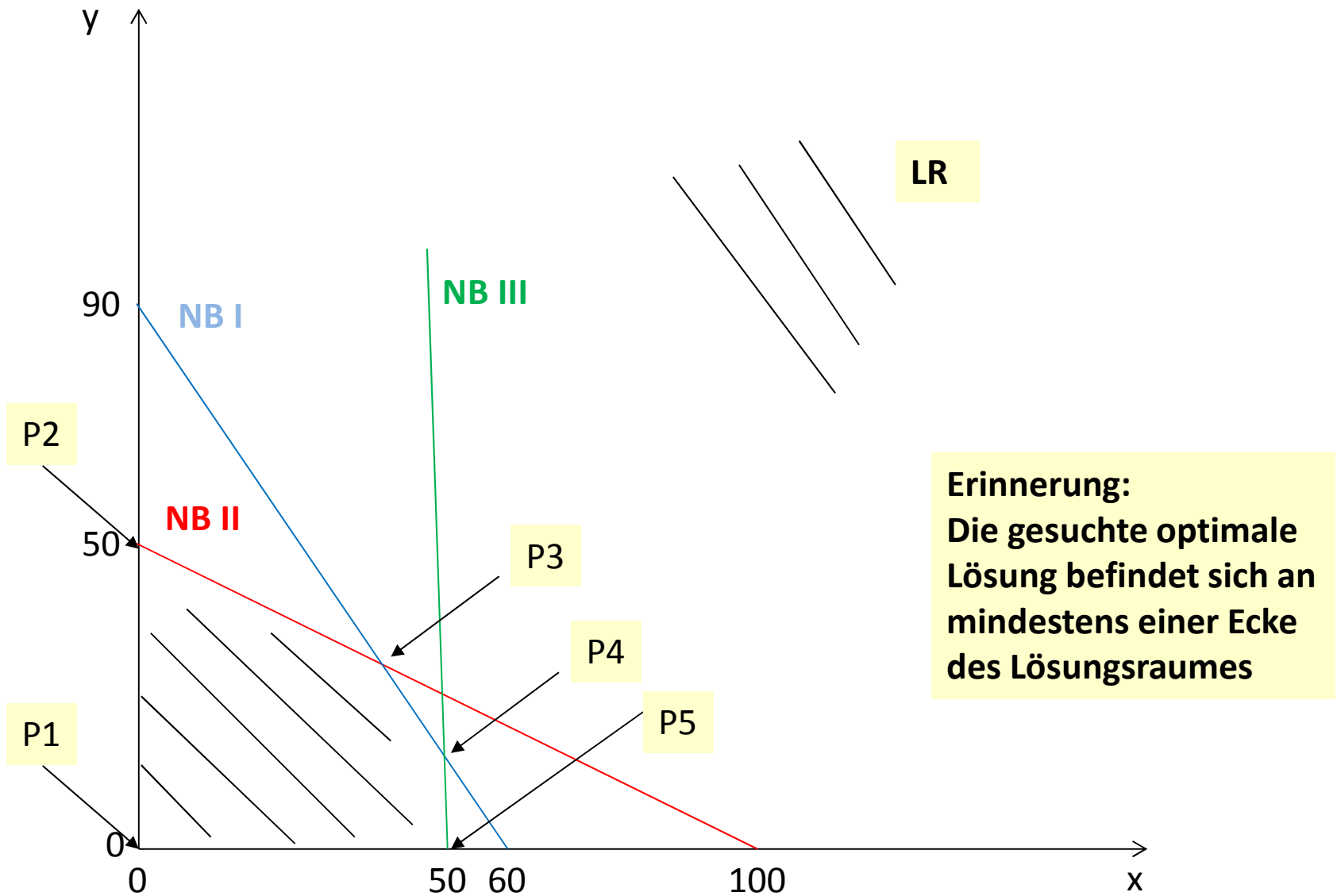




3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

P3 ( , )    Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

P4 ( , )    Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P5 (50, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I} \quad 3x + 2y = 180$$

$$\text{II} \quad x + 2y = 100$$

Wie lösen wir dieses Gleichungssystem?

P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

P3 ( , ) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

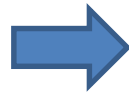
P4 ( , ) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P5 (50, 0)

Berechnung von P3

$$\text{I } 3x + 2y = 180$$

$$\text{II } x + 2y = 100$$



z. B. über das Additionsverfahren:

$$\text{I } 3x + 2y = 180$$

$$- \text{II } -(x + 2y) = 100$$

$$\hline = 2x = 80$$

$$x = 40$$



P3 also:

P3 (40, 30)

eingesetzt in II  $40 + 2y = 100$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

P3 (40, 30) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II. erledigt!!!

P4 ( , ) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P5 (50, 0)

Berechnung von P4

$$\text{I} \quad 3x + 2y = 180$$

$$\text{III} \quad x = 50$$

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

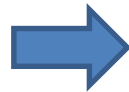
P3 (40, 30) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II. erledigt!!!

P4 ( , ) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

P2 (0, 50)

Berechnung von P4

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x + 2y = 180 \\ \text{III} \quad x = 50 \end{array}$$



durch bloßes Einsetzen...

$$\begin{array}{l} \text{III in I} \quad 3 \cdot 50 + 2y = 180 \\ \quad \quad \quad 2y = 30 \\ \quad \quad \quad y = 15 \end{array}$$

P4 also:  
4 (50, 15)



4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert!  
Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

P3 (40, 30) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II. erledigt!!!

P4 (50, 15) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III, erledigt!!!

P5 (50, 0)

$$z = f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow \max!$$

$$\mathbf{P1:} \quad z(0, 0) =$$

$$\mathbf{P2:} \quad z(0, 50) =$$

$$\mathbf{P3:} \quad z(40, 30) =$$

$$\mathbf{P4:} \quad z(50, 15) =$$

$$\mathbf{P5:} \quad z(50, 0) =$$

**4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert!  
Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!**

P1 (0, 0)

P2 (0, 50)

P3 (40, 30) Schnittpunkt zwischen NB I und NB II. erledigt!!!

P4 (50, 15) Schnittpunkt zwischen NB I und NB III, erledigt!!!

P5 (50, 0)

$$z = f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow \max!$$

$$\mathbf{P1: \quad z(0, 0) \quad = \quad 100*0 + 150*0 \quad = \quad 0}$$

$$\mathbf{P2: \quad z(0, 50) \quad = \quad 100*0 + 150*50 \quad = \quad 7.500}$$

$$\mathbf{P3: \quad z(40, 30) \quad = \quad 100*40 + 150*30 \quad = \quad 8.500}$$

$$\mathbf{P4: \quad z(50, 15) \quad = \quad 100*50 + 150*15 \quad = \quad 7.250}$$

$$\mathbf{P5: \quad z(50, 0) \quad = \quad 100*50 + 150*0 \quad = \quad 5.000}$$



$$\begin{aligned} \text{P1: } z(0, 0) &= 100 * 0 + 150 * 0 = 0 \\ \text{P2: } z(0, 50) &= 100 * 0 + 150 * 50 = 7.500 \\ \text{P3: } z(40, 30) &= 100 * 40 + 150 * 30 = 8.500 \\ \text{P4: } z(50, 15) &= 100 * 50 + 150 * 15 = 7.250 \\ \text{P5: } z(50, 0) &= 100 * 50 + 150 * 0 = 5.000 \end{aligned}$$

**Interpretation 1: das interpretieren, was dasteht**

**Also: Es werden 40 Stück von Produkt 1 und 30 Stück von Produkt 2 bei einem maximalen Gewinn von 8.500 Geldeinheiten.**

**Aber: Wissen wir noch mehr???**

**Ja klar, hier die Rohstoffmengen, was ist mit diesen?**

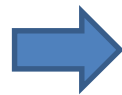
$$\begin{aligned}
 \text{P1: } z(0, 0) &= 100 * 0 + 150 * 0 = 0 \\
 \text{P2: } z(0, 50) &= 100 * 0 + 150 * 50 = 7.500 \\
 \text{P3: } z(40, 30) &= 100 * 40 + 150 * 30 = 8.500 \\
 \text{P4: } z(50, 15) &= 100 * 50 + 150 * 15 = 7.250 \\
 \text{P5: } z(50, 0) &= 100 * 50 + 150 * 0 = 5.000
 \end{aligned}$$

$$\text{NB I: } 3x + 2y \leq 180$$

$$\text{NB II: } x + 2y \leq 100$$

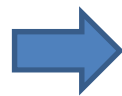
$$\text{NB III: } x \leq 50$$

$$\text{NB I: } 3x + 2y \leq 180$$



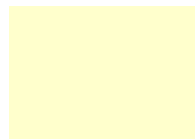
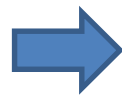
$3 * 40 + 2 * 30 = 180$  erfüllt  
Es bleibt von Rohstoff A nichts übrig.

$$\text{NB II: } x + 2y \leq 100$$



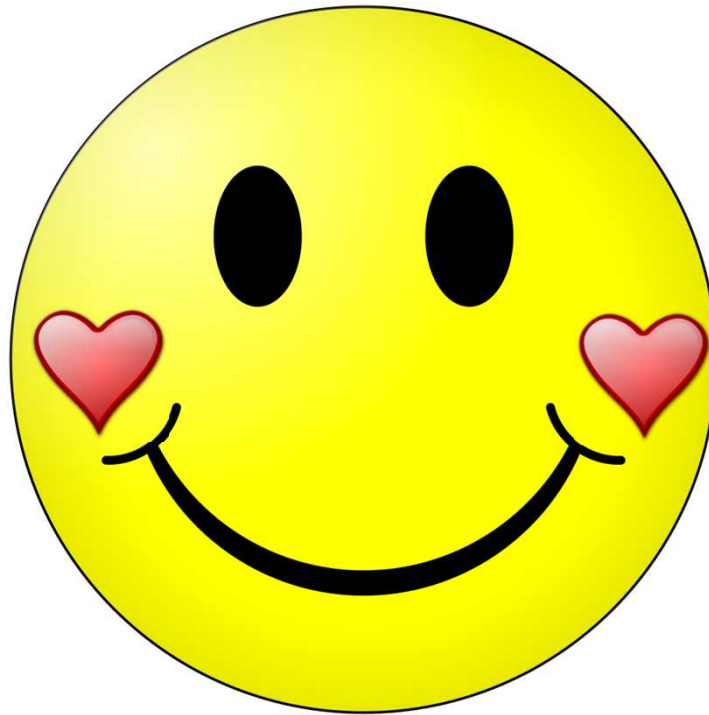
$$1 * 40 + 2 * 30 =$$

$$\text{NB III: } x \leq 50$$





... oh, da fehlt doch etwas ...



**Einen schönen Abend ...**