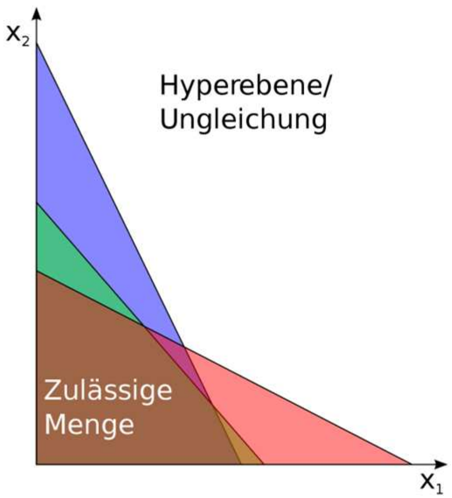
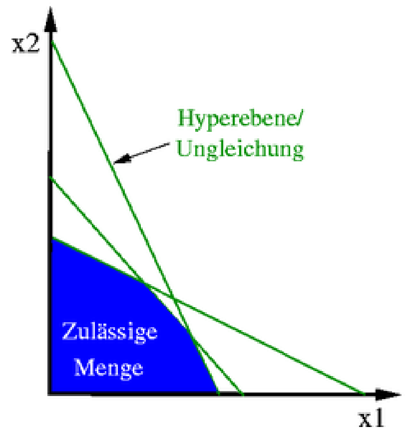
Zwei weitere Beispiele zur Linearen Programmierung

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i \in F} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in D, \\
& x_{ij} \leq y_i, \qquad \forall i \in F, j \in D, \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i \in F, j \in D, \\
& y_i \geq 0, \qquad \forall i \in F,
\end{aligned}
$$



C_B	C_j	60	100	80	0	0	0	RHS	Ratio
	Basis	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
100	x_2	1	1	1	1	0	0	500	
0	S_2	-1	0	1	-4	1	0	500	
0	S_3	-5	0	-3	-15	0	1	500	
$Z_j - C_j$		40	0	20	100	0	0	$Z^* = 50.000$	



Was auch passieren kann…

Gegeben sei folgendes Maximierungsproblem, das wir grafisch wollen:

Zielfunktion: $z = 2x + 2{,}5y \quad \rightarrow \quad \max!$

Nebenbedingungen:

$$4x + 5y \leq 60$$
$$x \leq 10$$
$$y \leq 8$$

Nichtnegativitätsbedingung: $x \geq 0; \quad y \geq 0$

a) Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!
b) Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?
c) Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung?
d) Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie zusätzlich die Zielfunktion in das Koordinatensystem eintragen. Wähle $z = 10$

a) **Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!**

Nebenbedigungen:

NB I: $4x + 5y \leq 60$

NB II: $x \leq 10$

NB III: $x \leq 8$

NB I: $4x + 5y \leq 60$

$4x + 5y = 60$

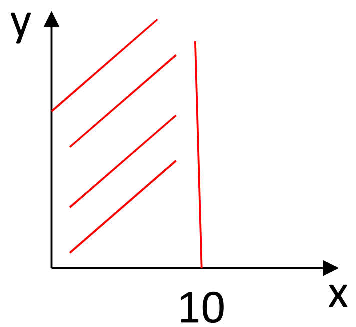
wenn x=0 → Y= 12

wenn y=0 → x= 15

(0/ 12)
(15/ 0)

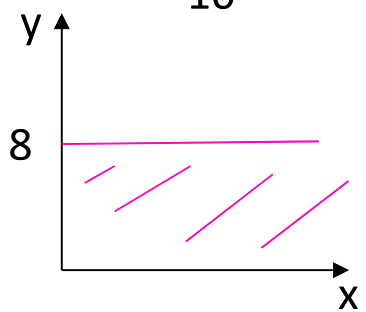
NB II: $x \leq 10$

$x = 10$

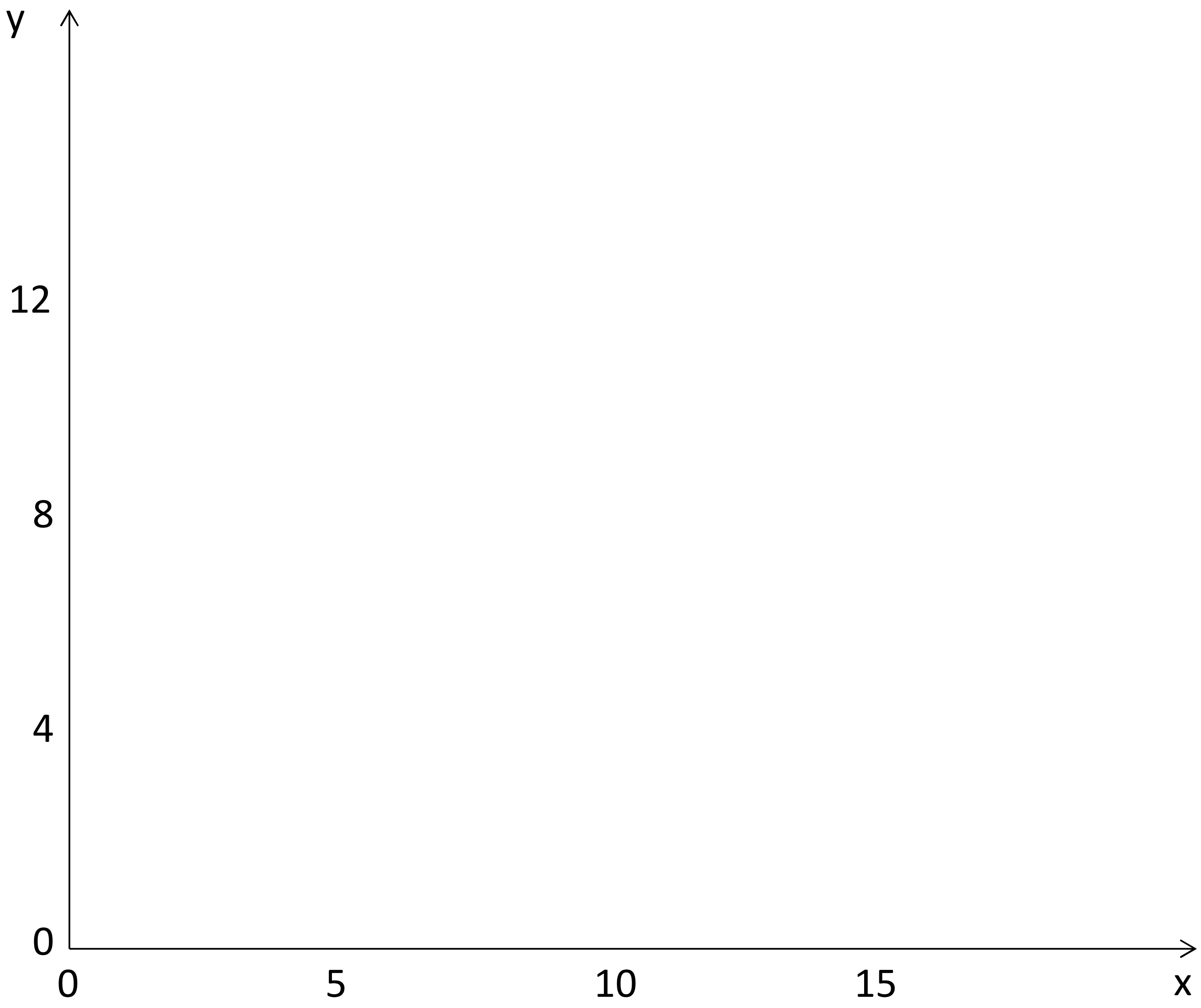


NB III: $y \leq 8$

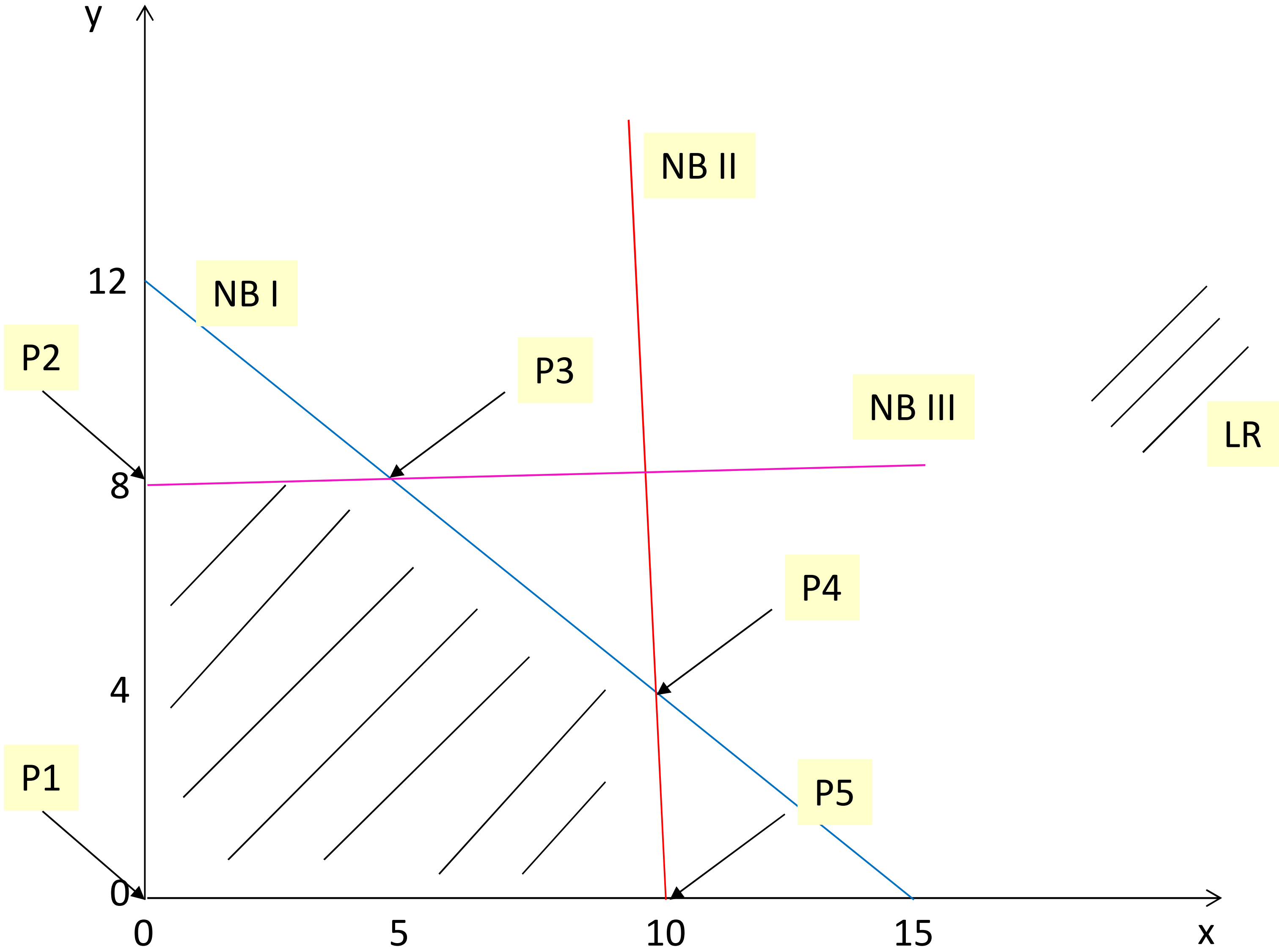
$y = 8$



b) Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?



b) Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage?



$P1\left(0,0\right)$

$P2\left(0,8\right)$

$P3\left(\quad,\quad\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\left(\quad,\quad\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\left(10,0\right)$

Berechnung von P3
I $4x + 5y = 60$
III $y = 8$

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem"?

$P1\left(0,0\right)$

$P2\left(0,8\right)$

$P3\left(\quad,\quad\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\left(\quad,\quad\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\left(10,0\right)$

Berechnung von P3

I	4x + 5y	=	60
III	y	=	8

durch bloßes Einsetzen...

III in I	4x + 5*8	=	60
	4x	=	20
	x	=	5

P3 also:
(5 , 8)

$P1\,(0,0)$

$P2\,(0,8)$

$P3\,(5,8)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\,(\quad,\quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\,(10,0)$

Berechnung von P4

I	4x + 5y	=	60
II	x	=	10

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

$P1\,(0,0)$

$P2\,(0,8)$

$P3\,(5,8)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\,(\quad,\quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\,(10,0)$

Berechnung von P3

I	4x + 5y	=	60
II	x	=	10

durch bloßes Einsetzen...

III in I $\quad 4*10 + 5y = 60$

$5y = 20$

$y = 4$

P4 also:
(10 , 4)

c) Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

$P1(0,0)$

$P2(0,8)$

$P3(5,8)$ $\quad$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4(10,4)$ $\quad$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5(10,0)$

$$z = f(x,y) = 2x + 2{,}5y \quad \rightarrow \max!$$

P1: z(0, 0) =

P2: z(0, 8) =

P3: z(5, 8) =

P4: z(10, 4) =

P5: z(10, 0) =

c) Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

$\mathrm{P1}\,(0,0)$

$\mathrm{P2}\,(0,8)$

$\mathrm{P3}\,(5,8)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$\mathrm{P4}\,(10,4)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$\mathrm{P5}\,(10,0)$

$$z = f(x,y) = 2x + 2{,}5y \quad \rightarrow \max!$$

P1:	**z(0, 0)**	**=**	**2*0 + 2,5*0**	**=**	**0**
P2:	**z(0, 8)**	**=**	**2*0 + 2,5*8**	**=**	**20**
P3:	**z(5, 8)**	**=**	**2*5 + 2,5*8**	**=**	**30**
P4:	**z(10, 4)**	**=**	**2*10 + 2,5*4**	**=**	**30**
P5:	**z(10, 0)**	**=**	**2*10 + 2,5*0**	**=**	**20**

Was ist nun?

P1:	**z(0, 0)**	**=**	**2*0 + 2,5*0**	**=**	**0**
P2:	**z(0, 8)**	**=**	**2*0 + 2,5*8**	**=**	**20**
P3:	**z(5, 8)**	**=**	**2*5 + 2,5*8**	**=**	**30**
P4:	**z(10, 4)**	**=**	**2*10 + 2,5*4**	**=**	**30**
P5:	**z(10, 0)**	**=**	**2*10 + 2,5*0**	**=**	**20**

Die Interpretation, P3 und P4 führen zur optimalen Lösung greift zu kurz!

d) Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie zusätzlich die Zielfunktion in das Koordinatensystem eintragen. Wähle $z = 10$!

Wir zeichnen nun die Zielfunktion in das Koordinatensystem,
Und verfahren genau wie bei den Nebenbedingungen!

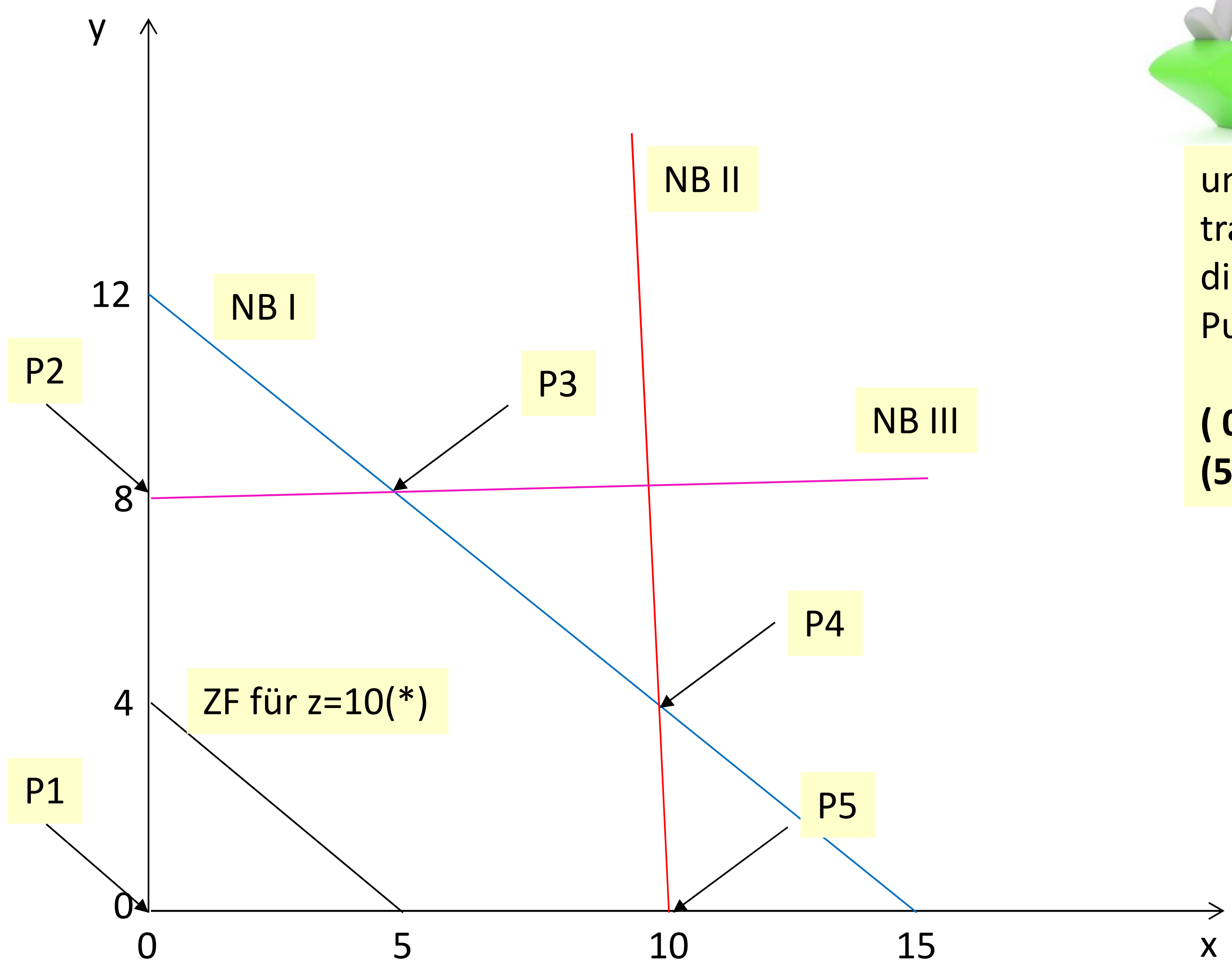
Also

ZF: $2x + 2{,}5y = 10$

wenn x=0   Y= 4

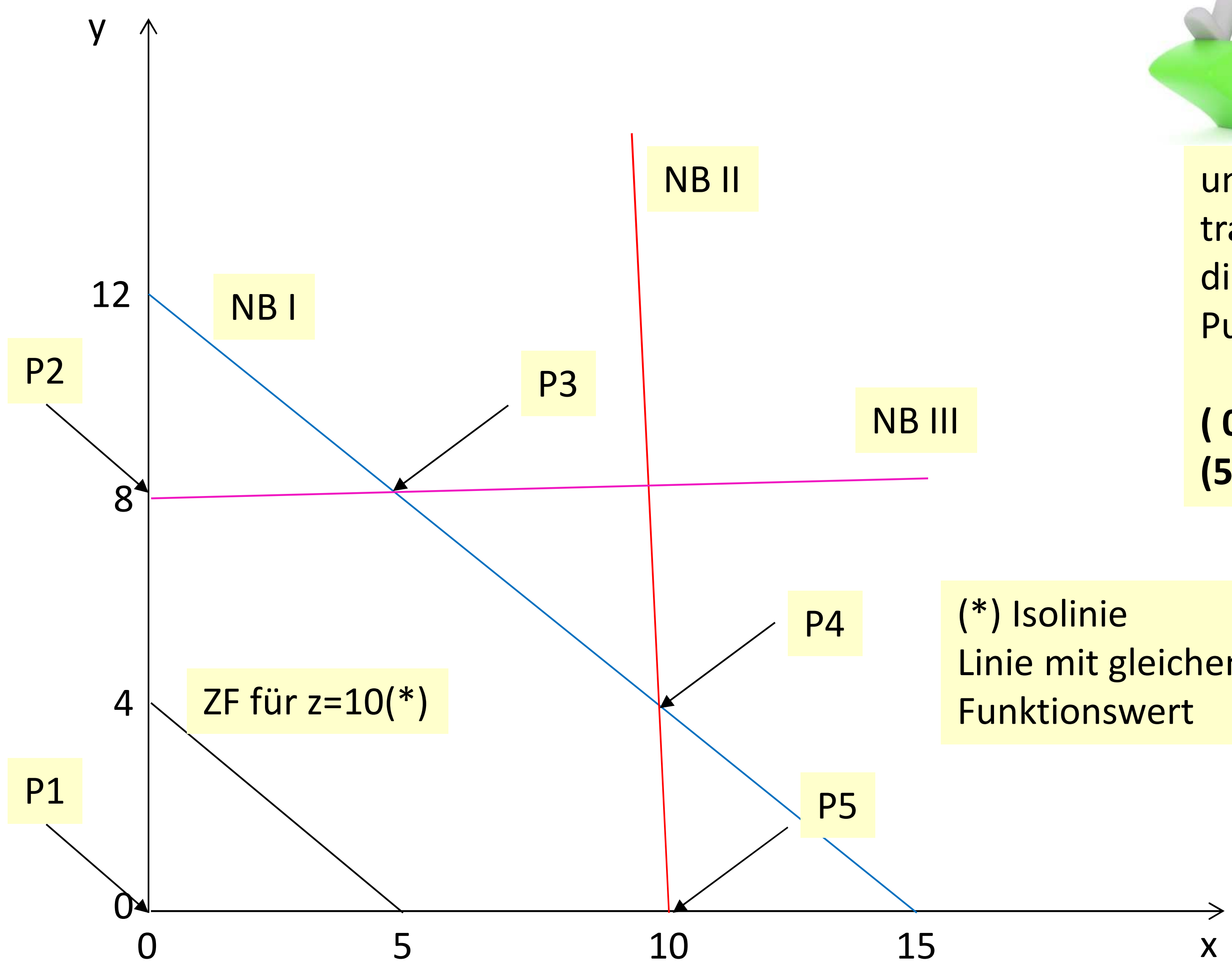
wenn y=0   x= 5

(0/ 4)
(5/ 0)



und nun tragen wir diese beiden Punkte ab!

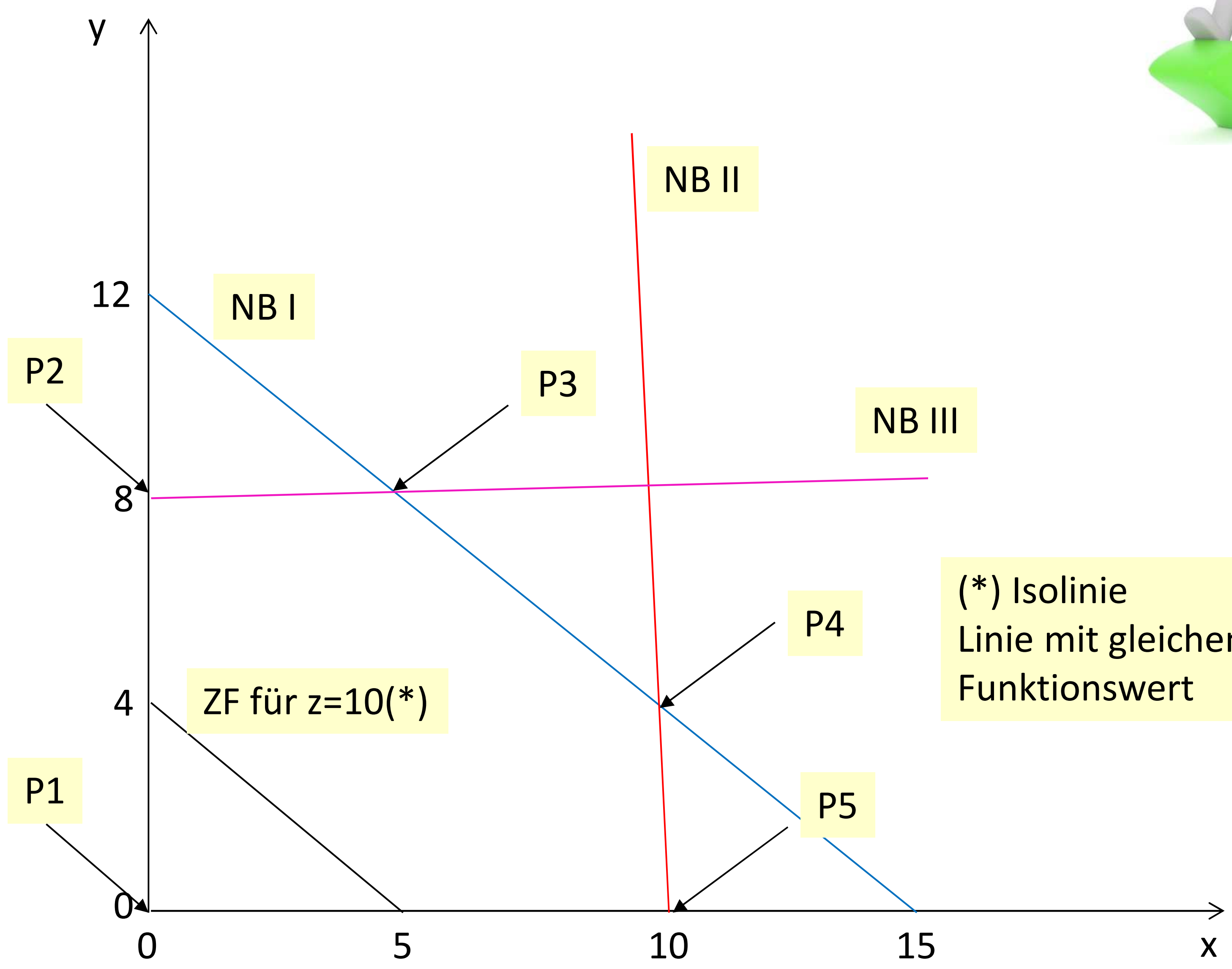
(0/ 4)
(5/ 0)



und nun tragen wir diese beiden Punkte ab!

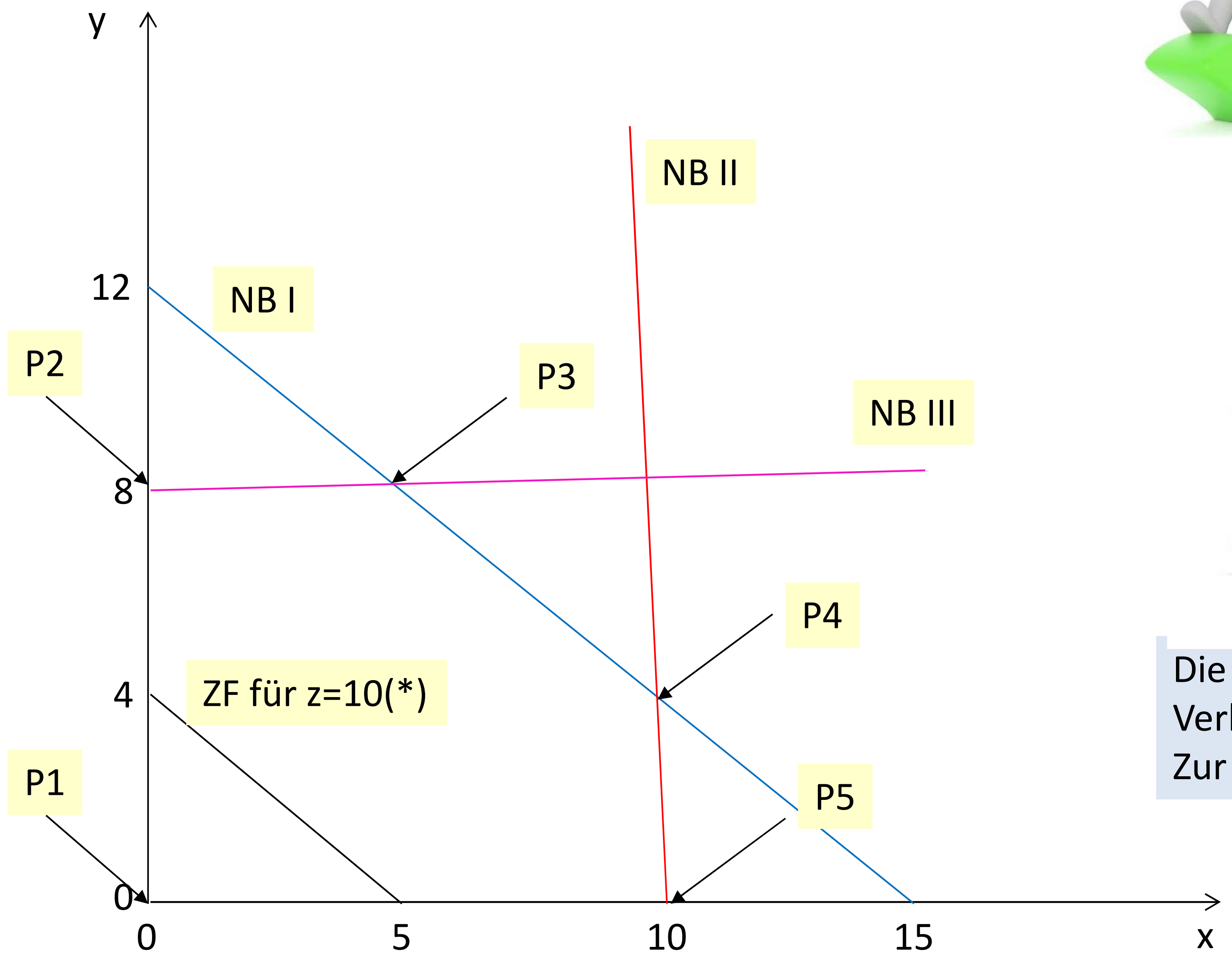
(0/ 4)
(5/ 0)

(*) Isolinie
Linie mit gleichem Funktionswert



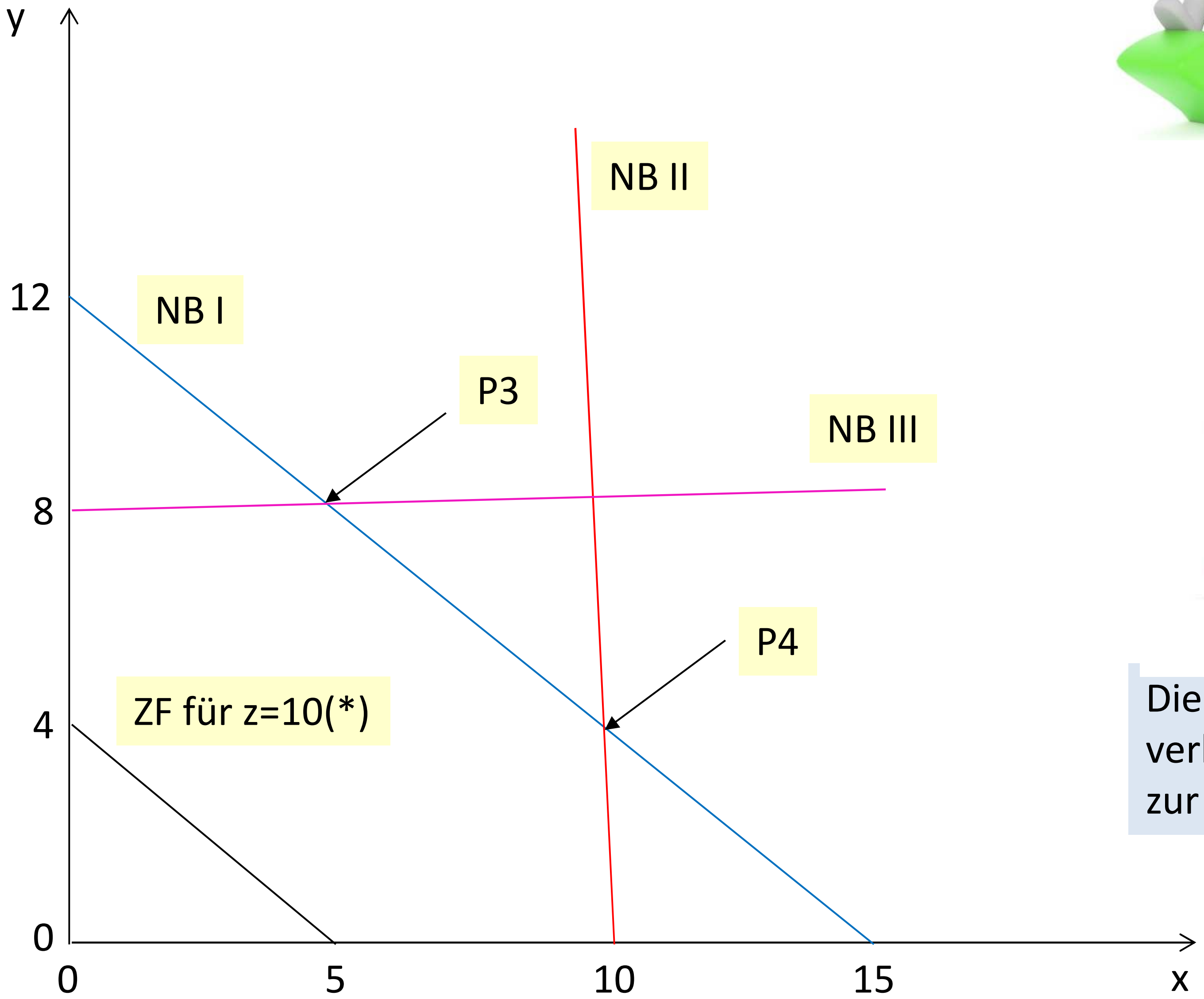
(*) Isolinie
Linie mit gleichem Funktionswert

Fällt etwas auf?



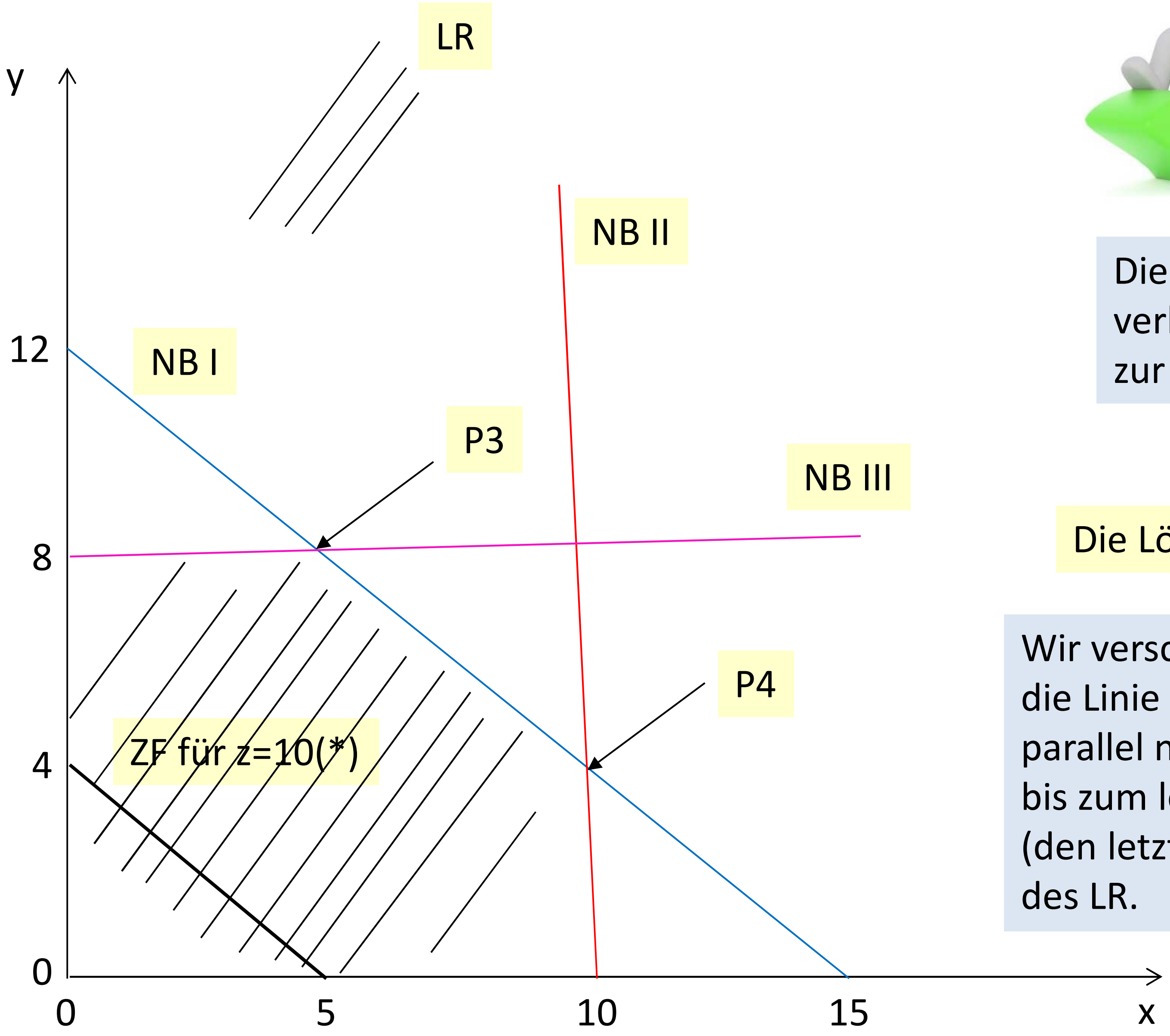
Die Linie z=10
Verläuft parallel
Zur Linie für NB I

!



Die Linie z=10 verläuft parallel zur Linie für NB I

!

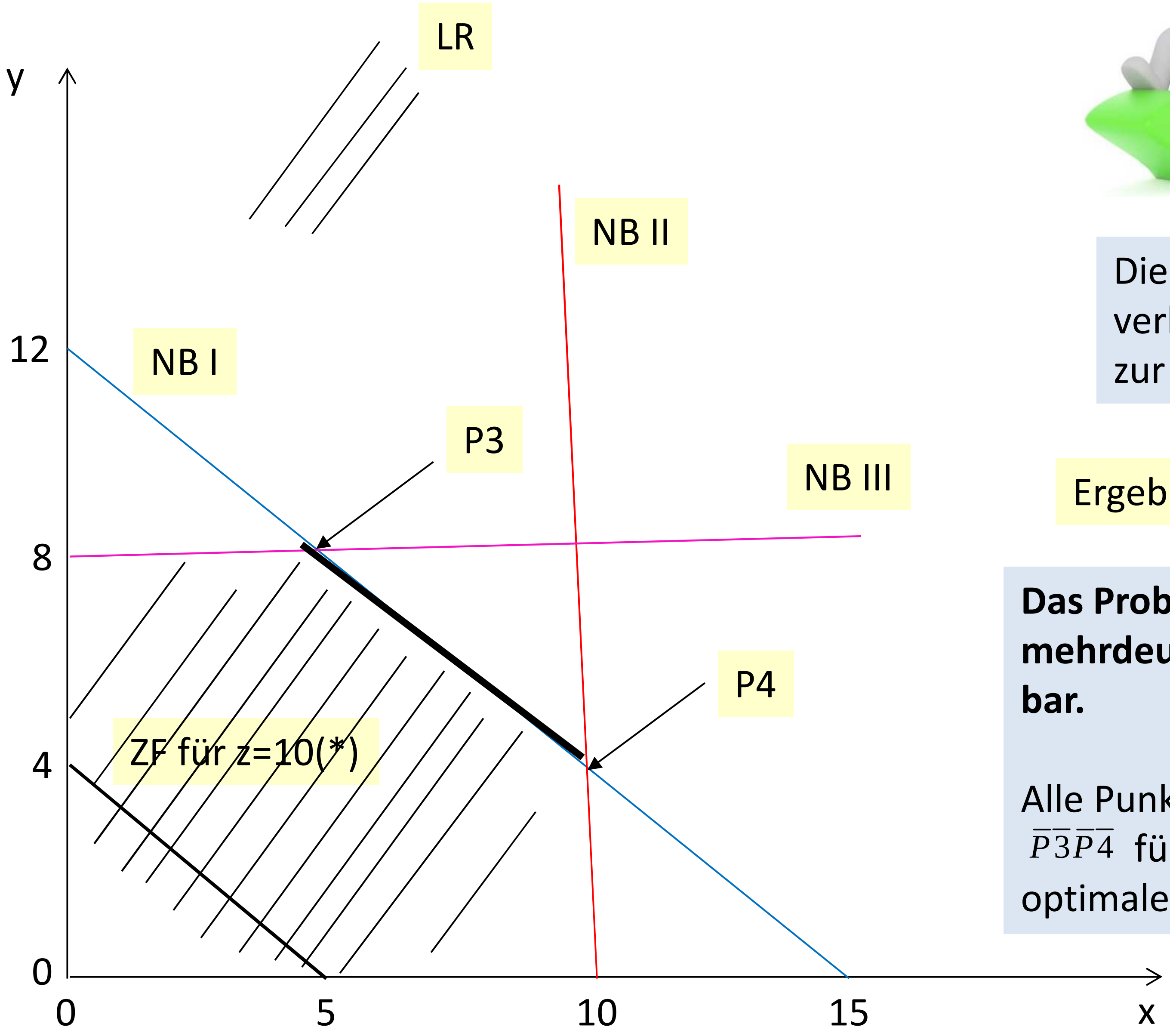


Die Linie z=10 verläuft parallel zur Linie für NB I

Die Lösung:

Wir verschieben die Linie z=10 parallel nach oben bis zum letzten Punkt (den letzten Punkten) des LR.

!



Die Linie z=10 verläuft parallel zur Linie für NB I

Ergebnis:

Das Problem ist mehrdeutig lösbar.

Alle Punkte auf $\overline{P3P4}$ führen zur optimalen Lösung

!

Die Hausaufgabe

Hausaufgabe

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte – Produkt 1 und Produkt 2 – her, die die drei Maschinentypen A, B und C passieren müssen. Die folgende Tabelle enthält die notwendigen Bearbeitungszeiten pro Mengeneinheit (ME), die täglich zur Verfügung stehenden Maschinenkapazitäten und den Gewinn pro Mengeneinheit in Geldeinheiten (GE) für jedes Produkt:

Maschine	Bearbeitungszeit in h/ME		Maschinenkapazität (in h)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	1	2	170
B	2	2	300
C	0	1	60
Gewinn (in GE/ME)	300	400	

1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!
2. Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!
3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.
4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

Maschine	Bearbeitungszeit in h/ME		Maschinenkapazität (in h)
	Produkt 1	Produkt 2	
A	1	2	170
B	2	2	300
C	0	1	60
Gewinn (in GE/ME)	300	400	

1. Erstellen Sie den mathematischen Ansatz, der dieses Optimierungsproblem beschreibt und geben Sie die Standardform der Linearen Programmierung an, d. h. formulieren Sie Zielfunktion, Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen!

Variablendefinition: x: Anzahl von Produkt 1

y: Anzahl von Produkt 2

Zielfunktion: $z = f(x, y) = 300x + 400y \quad \rightarrow \max!$

Nebenbedingungen: NB I: $x + 2y \leq 170$

NB II: $2x + 2y \leq 300$

NB III: $Y \leq 60$

Nichtnegatitätsbed.: $x \geq 0 \quad y \geq 0$

2. **Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem ein!**

Nebenbedigungen:

NB I: $x + 2y \leq 170$

NB II: $2x + 2y \leq 300$

NB III: $y \leq 60$

NB I: $x + 2y \leq 170$

$x + 2y = 170$

wenn x=0 Y= 85

wenn y=0 x= 170

(0/85)
(170/ 0)

NB II: $2x + 2y \leq 300$

$2x + 2y = 300$

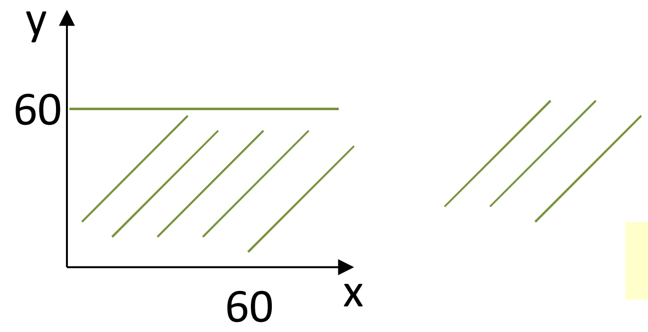
wenn x=0 Y=150

wenn y=0 x= 150

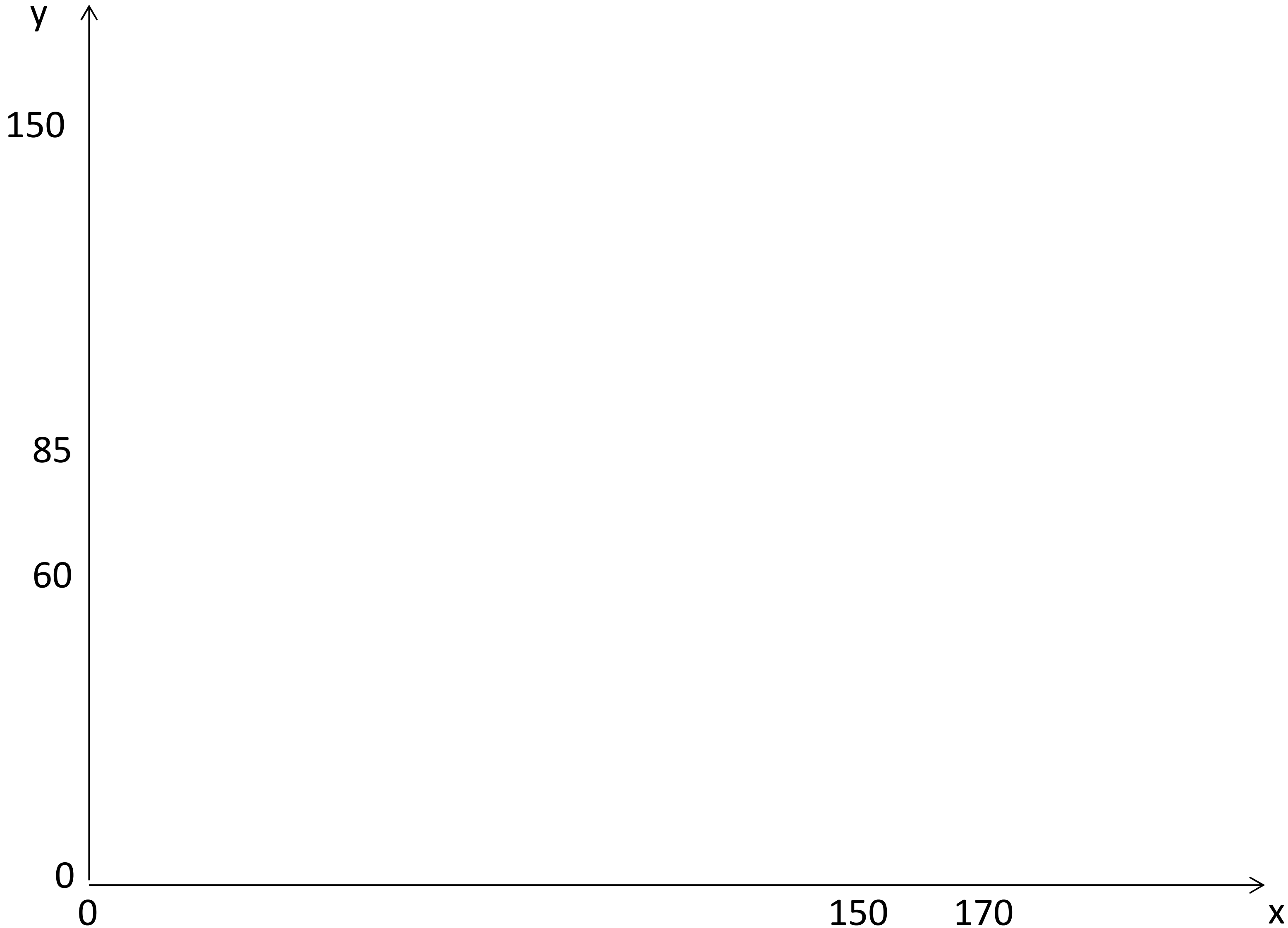
(0/150)
(150/ 0)

NB III: $y \leq 60$

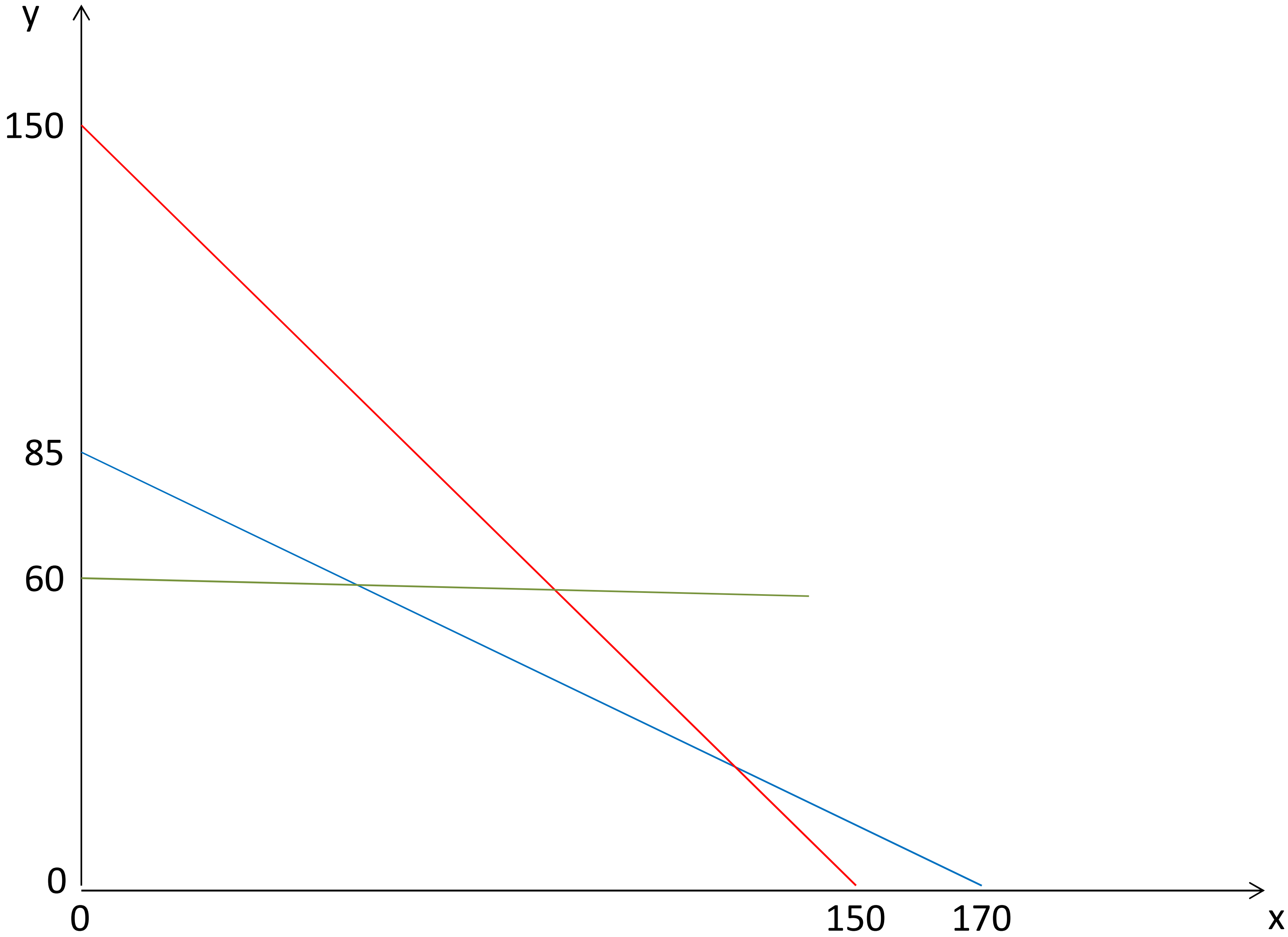
$y = 60$



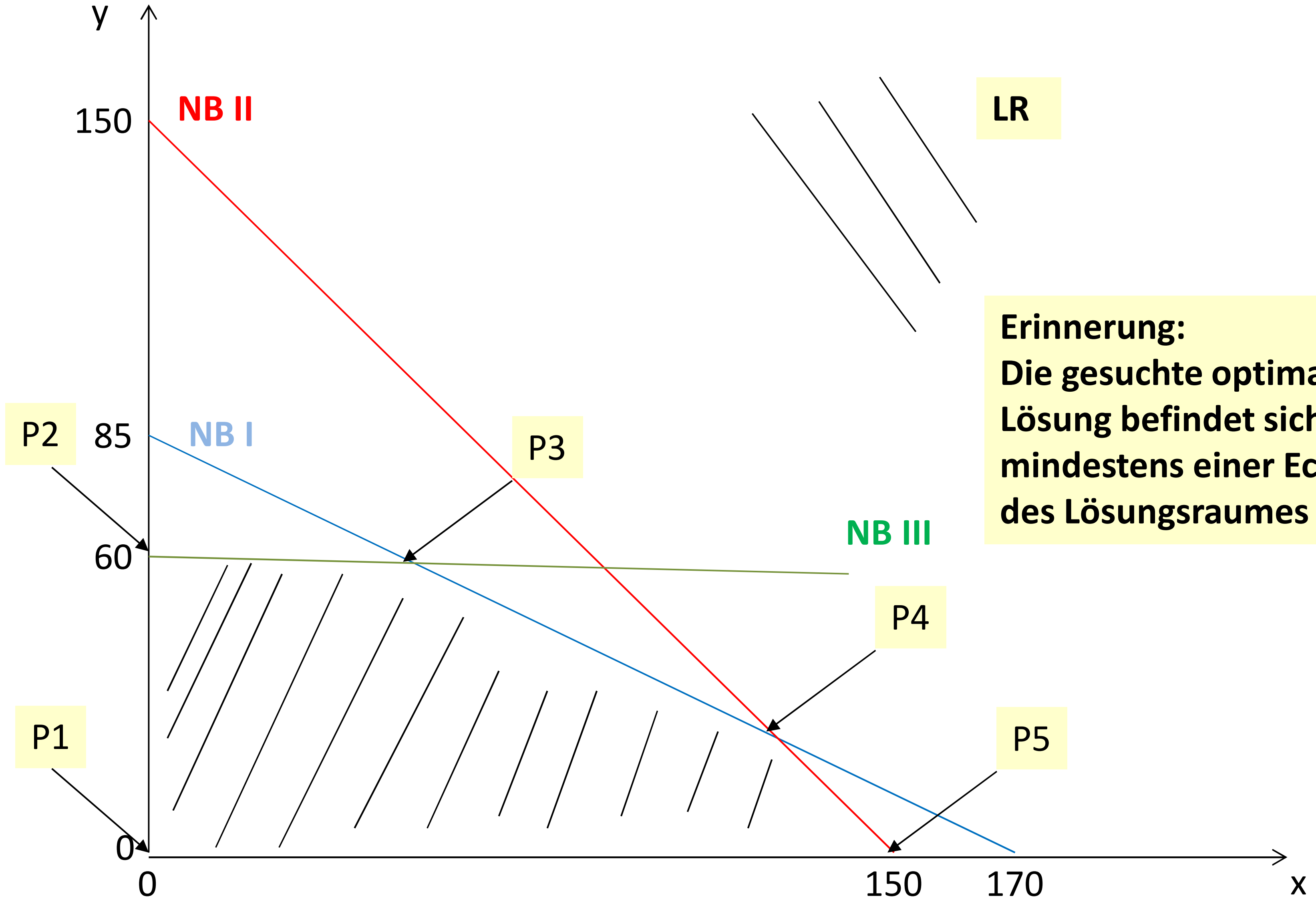
LR II


y
150
85
60
0
0
150
170
x

3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



3. Skizzieren Sie den Raum zulässiger Lösungen! Welche Punkte kommen für das Maximum in Frage? Schnittpunkte sollten berechnet werden.



Erinnerung:
Die gesuchte optimale Lösung befindet sich an mindestens einer Ecke des Lösungsraumes

$\mathrm{P1}(0, 0)$

$\mathrm{P2}(0, 60)$

$\mathrm{P3}(\quad,\quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$\mathrm{P4}(\quad,\quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$\mathrm{P5}(150, 0)$

Berechnung von P3

I	x + 2y	= 170
III	y	= 60

Wie lösen wir dieses „Gleichungssystem“?

$P1\,(0, 0)$

$P2\,(0, 60)$

$P3\,(\quad, \quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\,(\quad, \quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\,(150, 0)$

Berechnung von P3

I $\quad x + 2y = 170$

III $\quad y = 60$

durch bloßes Einsetzen…

III in I $\quad x + 2*60 = 170$

$x = 50$

P3 also:

P3 (50, 60)

$P1\,(0,0)$

$P2\,(0,60)$

$P3\,(50,60)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\,(\quad , \quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\,(150,0)$

Berechnung von P4

I	$x + 2y = 170$
II	$2x + 2y = 300$

Wie lösen wir dieses Gleichungssystem?

$P1\,(0,0)$

$P2\,(0,60)$

$P3\,(50,60)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$P4\,(\quad,\quad)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$P5\,(150,0)$

Berechnung von P4

I	x+ 2y	= 170
II	2x +2y	= 300

z. B. über das Additionsverfahren:

	I	x + 2y	= 170
-	II	-(2x + 2y)	= 300
=		-x	= -130
		x	= 130

eingesetzt in I 130 + 2y = 170

2y = 40

y = 20

P3 also:
P3 (130, 20)

4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

$\text{P1}\left(0, 0\right)$

$\text{P2}\left(0, 60\right)$

$\text{P3}\left(50, 60\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$\text{P4}\left(130, 20\right)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$\text{P5}\left(150, 0\right)$

$$z = f\left(x, y\right) = 300x + 400y \quad \to \max!$$

P1: z(0, 0) =

P2: z(0, 60) =

P3: z(50, 60) =

P4: z(130, 20) =

P5: z(150, 0) =

4. Berechnen Sie für diese Punkte den jeweils entstehenden Zielfunktionswert! Wie lautet Ihre Entscheidung? Interpretieren Sie das Endergebnis ausführlich!

$\mathrm{P1}\,(0,0)$

$\mathrm{P2}\,(0,60)$

$\mathrm{P3}\,(50,60)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB III

$\mathrm{P4}\,(130,20)$ Schnittpunkt zwischen NB I und NB II

$\mathrm{P5}\,(150,0)$

$$z = f(x,y) = 300x + 400y \quad \rightarrow \max!$$

P1:	**z(0, 0)**	**=**	**300* 0+400* 0**	**=**	**0**
P2:	**z(0, 60)**	**=**	**300* 0+400* 60**	**=**	**24.000**
P3:	**z(50, 60)**	**=**	**300* 50+400* 60**	**=**	**39.000**
P4:	**z(130, 20)**	**=**	**300*130+400* 20**	**=**	**47.000**
P5:	**z(150, 0)**	**=**	**300*150+400* 0**	**=**	**45.000**

P1:	z(0, 0)	=	300* 0+400* 0	= 0
P2:	z(0, 60)	=	300* 0+400* 60	= 24.000
P3:	z(50, 60)	=	300* 50+400* 60	= 39.000
P4:	z(130, 20)	=	300*130+400* 20	= 47.000
P5:	z(150, 0)	=	300*150+400* 0	= 45.000

Interpretation 1: das interpretieren, was dasteht

Also: Es werden 130 Stück von Produkt 1 und 20 Stück von Produkt 2 bei einem maximalen Gewinn von 47.000 Geldeinheiten.

Aber: Wissen wir noch mehr???
Ja klar, hier die Maschinenkapazitäten, was ist mit diesen?

P1:	**z(0, 0)**	**=**	**300* 0+400* 0**	**=**	**0**
P2:	**z(0, 60)**	**=**	**300* 0+400* 60**	**=**	**24.000**
P3:	**z(50, 60)**	**=**	**300* 50+400* 60**	**=**	**39.000**
P4:	**z(130, 20)**	**=**	**300*130+400* 20**	**=**	**47.000**
P5:	**z(150, 0)**	**=**	**300*150+400* 0**	**=**	**45.000**

NB I: $x + 2y \leq 170$

NB II: $2x + 2y \leq 300$

NB III: $y \leq 60$

NB I: $x + 2y \leq 170$ ⇨

1*130+2*20 =170 erfüllt
Bei Maschine A verbleibt keine freie Kapazität.

NB II: $2x + 2y \leq 300$ ⇨

2*130+2*20 =300 erfüllt
Bei Maschine B verbleibt keine freie Kapazität.

NB III: $y \leq 60$ ⇨

20 <= 60 erfüllt
Bei Maschine C verbleiben 40h freie Kapazität.


MERCI