

# Lösung ökonomischer Probleme

## Verfahren des Operations Research

Verfahren, die zum Optimum führen

- Johnson-Algorithmus
- Lineare Programmierung
- Dynamische Programmierung
- Ganzzahlige Programmierung

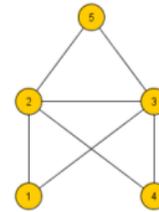
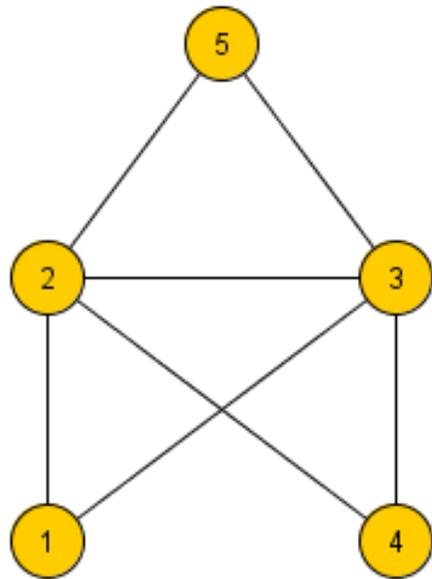
Heuristiken

- Prioritätsregeln
- beim Umrüstproblem
  - bester Nachfolger
  - schrittweise Einbeziehung von Stationen
- beim Transportproblem
  - Nordwestecken-Verfahren
  - Bewertungsverfahren
  - Vogel-Verfahren

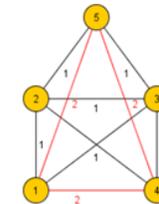
Simulation



# Umrüst- oder Rundreiseproblem

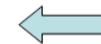


p: Gibt es einen Hamiltonkreis?



p': Gibt es eine Rundreise mit Gewicht  $\leq 5$ ?

ALGORITHMUS A  
Übergabe: G  
erzeuge G', g  
wende A' auf G', g an  
Rückgabe: Ergebnis von A'



ALGORITHMUS A'  
Übergabe: G', g  
...  
Rückgabe ...

False

False

p: ...



p': ...

polynomial { ALGORITHMUS A  
Übergabe: ...  
erzeuge Übergabedaten von A'  
wende A' auf Die Daten an  
Rückgabe: ... } polynomial

ALGORITHMUS A'  
Übergabe: ...  
...  
Rückgabe ... } polynomial

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## 1. Umrüstproblem

- Was sind Rüstkosten?
- Was sind Heuristiken?

- **Lösungen mittels Heuristiken?**
  - ✓ Verfahren des besten Nachfolgers
  - ✓ Verfahren der schrittweisen (sukzessiven) Einbeziehung von Stationen
- Versuch einer optimalen Lösung
  - ✓ Vollständige Aufzählung der Möglichkeiten
  - ✓ Begrenzte Aufzählung der Möglichkeiten

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Umrüstproblem oder Rundreiseproblem

### Zwei Heuristiken

- 
- Verfahren des besten Nachfolgers
  - Verfahren der sukzessiven (schrittweisen) Einbeziehung von Stationen

### Zwei optimierende Verfahren

- 
- Verfahren der vollständigen Aufzählung der Möglichkeiten
  - Verfahren der begrenzten Aufzählung der Möglichkeiten

Anstelle von Aufzählung steht oft auch Enumeration.

Die beiden optimierenden Verfahren werden nur im Unterricht dargestellt.

# speziell Umrüstproblem

## Kosten für

- das Umstellen, Einrichten, Reinigen der Maschine
- das Rückführen der Maschine in den Anfangszustand
- Probeläufe, Anwärmprozesse

## • Direkte Rüstkosten

- alle beim Rüstvorgang anfallenden
  - Personalkosten
  - Materialkosten
  - Maschinenkosten

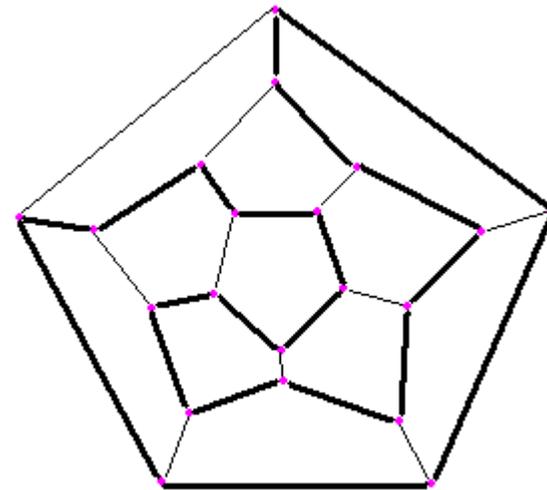
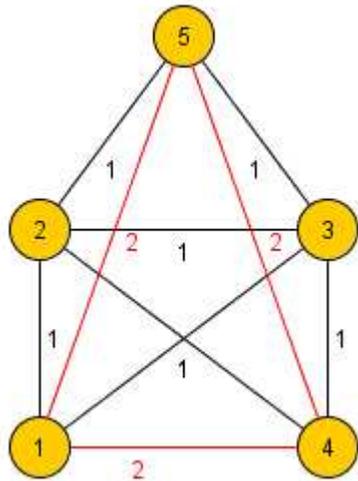
## • Indirekte Rüstkosten

- entgangene Deckungsbeiträge während des Stillstandes beim Umrüsten (Opportunitätskosten)



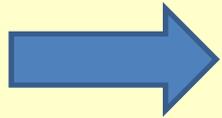
# speziell Rundreiseproblem

Das Problem des Handlungsreisenden (auch Botenproblem, Rundreiseproblem, *Traveling Salesman Problem*) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem. Die Aufgabe besteht darin, eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu wählen, dass keine Station außer der ersten mehr als einmal besucht wird, die gesamte Reisstrecke möglichst kurz und die erste Station gleich der letzten Station ist.

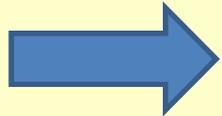


# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Mathematische Einordnung:



Rundreiseproblem  
Traveling-Salesman-Problem



ein optimaler Lösungsweg ist die vollständige Aufzählung aller  
denkbaren Möglichkeiten (Kombinationen)



## Problem:

Es gibt  $n!$  mögliche Kombinationen

$n!$  spricht:  $n$  Fakultät

formal:  $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

inhaltlich: Produkt aus den ersten  $n$  natürlichen Zahlen

## Zur Orientierung:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 * 2 = 2$$

$$3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

$$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

$$10! = \dots = 3.628.800$$

$$20! = \dots = 2,432902 * 10 \text{ hoch } 18$$

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Bei 20 zu besuchenden Stationen:  
 $20! = \dots = 2,432902 \cdot 10^{18}$   
zu untersuchende Kombinationen  
10 hoch 18 ist eine Zahl mit 18 Nullen:  
1.000.000.000.000.000.000

**1 MIT 18 NULLEN heißt TRILLION.**



Das schaffen auch gute Großrechner nicht  
in vertretbarer Zeit.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Bei 4 zu besuchenden Stationen:  
 $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$   
zu untersuchende Kombinationen



Auch hier ist es für den Ungeübten schwierig, diese 24 Kombinationen aufzuschreiben ...

Mit A als Ausgangs- und Endort sowie B als erstem aufgesuchten Ort ergeben sich folgende sechs Kombinationen:

- (1) A-B- C-D-E- A
- (2) A-B- C-E-D- A
- (3) A-B- D-C-E- A
- (4) A-B- D-E-C- A
- (5) A-B- E-C-D- A
- (6) A-B- E-D-C- A

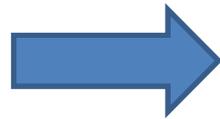
Mit A als Ausgangs- und Endort sowie C oder D oder E als erstem aufgesuchten Ort ergeben analog sechs Kombinationen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Mathematische Einordnung:

Rundreiseproblem  
Traveling-Salesman-Problem

ein weiterer optimaler Lösungsweg ist die begrenzte Aufzählung  
aller denkbaren Möglichkeiten (Kombinationen)



## Vorgehen:

Eine Kombination wird nur solange gerechnet, bis ein bisher erreichter minimaler Wert nicht überschritten ist. Beim Erreichen dieses Wertes wird die Berechnung dieser Kombination sofort abgebrochen.

Sollte sich ein neuester kleinster Wert ergeben, wird dieser als neue Grenze genommen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Beispiel 1 formuliert als Umrüstproblem:

Für das Produktionsprogramm der folgenden Woche (5 Aufträge mit jeweils unterschiedlichen Serientypen) sollen Sie aufgrund der gegebenen Umrüstkostenmatrix mittels heuristischer Verfahren die Umrüstfolge bestimmen unter der Vorgabe, dass es für keinen Auftrag eine zeitliche Vorgabe gibt und dass die Ausgangs- und Endposition aufgrund technischer Gegebenheiten zwingend A sein muss:

von Serientyp i	auf Serientyp k	A	B	C	D	E
A (Anfangs- und Endposition)		-	16	15	18	19
B		16	-	19	14	16
C		14	89	-	17	18
D		15	14	18	-	15
E		16	16	17	14	-

Alle Angaben in 10 Euro! **Hinweis:** Die Angabe 89 ist kein Tippfehler!

1. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren des besten Nachfolgers! Wie hoch sind die Gesamtkosten?
2. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren der sukzessiven Einbeziehung von Stationen. Fügen Sie in den Zyklus zunächst Auftrag D, danach Auftrag E, danach Auftrag B und am Ende C ein. Denken Sie daran, dass A die Endposition der Maschine sein muss! Wie hoch sind die Gesamtkosten?  
In einer Klausuraufgabe kommen noch zwei weitere Aufgabenteile hinzu (Beispiele in der Veranstaltung)

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Beispiel 1 formuliert als Rundreiseproblem:

Der Handlungsreisende aus A muss je einen Kunden in B, in C, in D und in E besuchen, am Ende muss er nach A zurückkehren. Sie sollen aufgrund der gegebenen Entfernungsmatrix mittels heuristischer Verfahren die Wegefolge bestimmen unter der Vorgabe, dass es keine Prioritäten für die Kunden gibt.

nach Ort k					
von Ort i	A	B	C	D	E
A (Wohnort des Handlungsreisenden)	-	16	15	18	19
B	16	-	19	14	16
C	14	89	-	17	18
D	15	14	18	-	15
E	16	16	17	14	-

Alle Angaben in 10 Euro! **Hinweis:** Die Angabe 89 ist kein Tippfehler!

1. Bestimmen Sie die Reihenfolge der Orte nach dem Verfahren des besten Nachfolgers! Wie hoch sind die Gesamtkosten?
2. Bestimmen Sie die Reihenfolge der Orte nach dem Verfahren der sukzessiven Einbeziehung von Stationen. Fügen Sie in den Zyklus zunächst Kunde in D, danach Kunde in E, danach Kunde in B und am Ende Kunde in C ein. Denken Sie daran, dass der Handlungsreisende am Ende nach A zurückkehren muss und will! Wie hoch sind die Gesamtkosten?

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Lösung mit einer ersten Heuristik

Verfahren des besten Nachfolgers:

Ausgehend von einem bestimmten Rüstzustand wird der diesem am kostengünstigsten einnehmbare Zustand als nächster abgenommen.

Verfahren des besten Nachfolgers:

Es ergibt sich die Reihenfolge:

Kosten

A -----?-----?-----?-----?-----A

Welche Option ist die günstigste (günstigere)?

möglich: B; C; D; E

nicht mehr möglich, weil erledigt: -

Entscheidung vom letzten Ort aus:

niedrigster (niedrigerer) unter den möglichen: C mit 15







# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Lösung mit einer ersten Heuristik

Verfahren des besten Nachfolgers:

Ausgehend von einem bestimmten Rüstzustand wird der diesem am kostengünstigsten einnehmbare Zustand als nächster abgenommen.

Verfahren des besten Nachfolgers:

Es ergibt sich die Reihenfolge:

Kosten	15	17	14	16	
	A	-----C	-----D	-----B	-----E-----A

Welche Option ist die günstigste (günstigere)?

möglich: -

nicht mehr möglich, weil erledigt: C; D; B; E

Entscheidung vom letzten Ort aus:

niedrigster (niedrigerer) unter den möglichen: kein Wahl mehr; zurück nach A mit 16

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Lösung mit einer ersten Heuristik

### Verfahren des besten Nachfolgers:

Ausgehend von einem bestimmten Rüstzustand wird der diesem am kostengünstigsten einnehmbare Zustand als nächster abgenommen.

### Verfahren des besten Nachfolgers:

Es ergibt sich die Reihenfolge:

Kosten	15	17	14	16	16	
	A	C	D	B	E	A

Welche Option ist die günstigste (günstigere)?

möglich: -

nicht mehr möglich, weil erledigt: C; D; B; E

Entscheidung vom letzten Ort aus:

niedrigster (niedrigerer) unter den möglichen: kein Wahl mehr; zurück nach A mit 16

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Lösung mit einer ersten Heuristik

### Verfahren des besten Nachfolgers:

Ausgehend von einem bestimmten Rüstzustand wird der diesem am kostengünstigsten einnehmbare Zustand als nächster abgenommen.

### Verfahren des besten Nachfolgers:

Es ergibt sich die Reihenfolge:

Kosten	15	17	14	16	16
	A	C	D	B	E

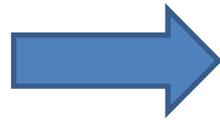
A-----C-----D-----B-----E-----A

**Ergebnis:** Beim Verfahren des besten Nachfolgers wählt man die Rüstfolge A-C-D-B-E-A, und es entstehen Gesamtkosten in Höhe von € 780,--.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

**Verfahren des besten Nachfolgers: Betriebswirtschaftliche Wertung**

- sehr einfach
- aber am Ende ist man unter Umständen auf (sehr) ungünstige Verbindungen angewiesen



**Versuch einer Verbesserung  
Verfahren des schrittweisen Einbeziehung von  
Stationen**

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

## Lösung mit einer zweiten Heuristik

**Verfahren der schrittweisen (sukzessiven) Einbeziehung von Stationen:**

**Ausgehend von einem bestimmten Anfangszyklus soll ein weiterer Rüstzustand kostengünstigst eingepflegt werden (beim Umrüstproblem).**

**Ausgehend von einem bestimmten Anfangszyklus soll ein weiterer Zielort kostengünstigst eingepflegt werden (beim Rundreiseproblem).**

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Beispiel 1 formuliert als Umrüstproblem:

Für das Produktionsprogramm der folgenden Woche (5 Aufträge mit jeweils unterschiedlichen Serientypen) sollen Sie aufgrund der gegebenen Umrüstkostenmatrix mittels heuristischer Verfahren die Umrüstfolge bestimmen unter der Vorgabe, dass es für keinen Auftrag eine zeitliche Vorgabe gibt und dass die Ausgangs- und Endposition aufgrund technischer Gegebenheiten zwingend A sein muss:

von Serientyp i	auf Serientyp k	A	B	C	D	E
A (Anfangs- und Endposition)		-	16	15	18	19
B		16	-	19	14	16
C		14	89	-	17	18
D		15	14	18	-	15
E		16	16	17	14	-

Alle Angaben in 10 Euro! **Hinweis:** Die Angabe 89 ist kein Tippfehler!

1. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren des besten Nachfolgers! Wie hoch sind die Gesamtkosten?
2. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren der sukzessiven Einbeziehung von Stationen. Fügen Sie in den Zyklus zunächst Auftrag D, danach Auftrag E, danach Auftrag B und am Ende C ein. Denken Sie daran, dass A die Endposition der Maschine sein muss! Wie hoch sind die Gesamtkosten?  
In einer Klausuraufgabe kommen noch zwei weitere Aufgabenteile hinzu (Beispiele in der Veranstaltung)

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Verfahren der schrittweisen Einbeziehung von Stationen:

Vorgabe: erst D, dann E, dann B und zum Schluss C einpflegen

(In der Veranstaltung wird die Aufgabenstellung dann mit alternativen Vorgaben gerechnet werden)

Schritt 1: Einpflegen von D

Kosten	18	15		Gesamtkosten
	A	-----D	-----A	330

Schritt 2: E kostengünstigst in A-D-A einpflegen

Kosten	18	15	16		
	A	-----D	-----E	-----A	490

Kosten	19	14	15		
	A	-----E	-----D	-----A	480*

\* Da der Zyklus A-E-D-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der Ausgangspunkt der weiteren Rechnungen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Schritt 3: B kostengünstigst in A-E-D-A einpflegen

Kosten	19	14	14	16	Gesamtkosten
A -----E-----D-----B-----A					630
Kosten	19	16	14	15	Gesamtkosten
A -----E-----B-----D-----A					640
Kosten	16	16	14	15	Gesamtkosten
A -----B-----E-----D-----A					610*

\* Da der Zyklus A-B-E-D-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der Ausgangspunkt der weiteren Rechnungen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Schritt 4: C kostengünstigst in A-B-E-D-A einpflegen

Kosten	16	16	14	18	14	Gesamtkosten	
	A	-----B	-----E	-----D	-----C	-----A	780*

Kosten	16	16	17	17	15		
	A	-----B	-----E	-----C	-----D	-----A	810

Kosten	16	19	18	14	15		
	A	-----B	-----C	-----E	-----D	-----A	820

Kosten	17	89					
	A	-----C	-----B	-----E	-----D	-----A	Abbruch

\* Da der Zyklus A-B-E-D-C-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der die Lösung des Verfahrens der schrittweisen Einbeziehung bin Stationen, wenn die Einpflegefolge D-E-B-C gewählt wird.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Beispiel 1 formuliert als Umrüstproblem:

Für das Produktionsprogramm der folgenden Woche (5 Aufträge mit jeweils unterschiedlichen Serientypen) sollen Sie aufgrund der gegebenen Umrüstkostenmatrix mittels heuristischer Verfahren die Umrüstfolge bestimmen unter der Vorgabe, dass es für keinen Auftrag eine zeitliche Vorgabe gibt und dass die Ausgangs- und Endposition aufgrund technischer Gegebenheiten zwingend A sein muss:

von Serientyp i	auf Serientyp k	A	B	C	D	E
A (Anfangs- und Endposition)		-	16	15	18	19
B		16	-	19	14	16
C		14	89	-	17	18
D		15	14	18	-	15
E		16	16	17	14	-

- Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren der sukzessiven Einbeziehung von Stationen. Fügen Sie in den Zyklus zunächst Auftrag C, danach Auftrag B, danach Auftrag E und am Ende D ein. Denken Sie daran, dass A die Endposition der Maschine sein muss! Wie hoch sind die Gesamtkosten?

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Verfahren der schrittweisen Einbeziehung von Stationen:  
Vorgabe: erst C, dann B, dann E und zum Schluss D einpflegen

Schritt 1: Einpflegen von C

Kosten	15	14		Gesamtkosten
	A	-----C	-----A	290

Schritt 2: B kostengünstigst in A-C-A einpflegen

Kosten	15	89		Abbruch
	A	-----C	-----B	-----A
Kosten	16	19	14	490*
	A	-----B	-----C	-----A

\* Da der Zyklus A-B-C-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der Ausgangspunkt der weiteren Rechnungen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Schritt 3: E kostengünstigst in A-B-C-A einpflegen

Kosten	16	19	18	16	Gesamtkosten
A -----B-----C-----E-----A					690
Kosten	16	16	17	14	630*
A -----B-----E-----C-----A					
Kosten	19	16	19	14	680
A -----E-----B-----C-----A					

\* Da der Zyklus A-B-E-C-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der Ausgangspunkt der weiteren Rechnungen.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Schritt 4: D kostengünstigst in A-B-E-C-A einpflegen

Kosten	16	16	17	17	15	Gesamtkosten	
	A	-----B	-----E	-----C	-----D	-----A	810

Kosten	16	16	14	18	14		
	A	-----B	-----E	-----D	-----C	-----A	780

Kosten	16	14	15	17	14		
	A	-----B	-----D	-----E	-----C	-----A	760*

Kosten	18	14	16	17	14		
	A	-----D	-----B	-----E	-----C	-----A	790

\* Da der Zyklus A-B-D-E-C-A die geringeren Kosten aufweist, ist er der die Lösung des Verfahrens der schrittweisen Einbeziehung bin Stationen, wenn die Einpflegefolge C-B-E-D gewählt wird.

# Umrüst- oder Rundreiseproblem

Verfahren des schrittweisen Einbeziehung von Stationen:  
Betriebswirtschaftliche Wertung

- einfach
- besser als „Bester Nachfolger“, weil mehrere Kombinationen durchgerechnet werden.
- gut insbesondere dann, wenn mehrere derartige Zyklen durchgerechnet werden.



Verbesserung  
Verfahren, die die optimale Lösung finden

# Umrüstproblem - Beispiel 2

Für das Produktionsprogramm der folgenden Woche (5 Aufträge mit jeweils unterschiedlichen Serientypen) sollen Sie aufgrund der gegebenen Umrüstkostenmatrix mittels heuristischer Verfahren die Umrüstfolge bestimmen unter der Vorgabe, dass es für keinen Auftrag eine zeitliche Vorgabe gibt und dass die Ausgangs- und Endposition aufgrund technischer Gegebenheiten zwingend A sein muss:

von Serientyp i	auf Serientyp k	A	B	C	D	E
	A (Anfangs- und Endposition)	-	6	3	4	2
	B	3	-	6	8	3
	C	5	2	-	3	6
	D	1	5	3	-	11
	E	7	4	4	2	-

1. Erklären Sie zunächst, was eine Heuristik ist und welche Merkmale eine Heuristik kennzeichnen!
2. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren des besten Nachfolgers! Wie hoch sind die Gesamtkosten?
3. Bestimmen Sie die Umrüstfolge nach dem Verfahren der sukzessiven Einbeziehung von Stationen. Fügen Sie in den Zyklus zunächst Auftrag E, danach Auftrag B, danach Auftrag C und am Ende D ein. Denken Sie daran, dass A die Endposition der Maschine sein muss! Wie hoch sind die Gesamtkosten?



**MERCI**



**Einen schönen Abend ...**